



TESIS - SM 142501

**MODIFIKASI DEKOMPOSISI
DULMAGE-MENDELSON PADA MATRIKS
PERSEGI REGULER TEREDUKSI ATAS
ALJABAR MAX-PLUS**

MUHAMAD SUEF
NRP 0611 1650 010 018

DOSEN PEMBIMBING:
Dr. Subiono, M.S.

PROGRAM MAGISTER
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA, KOMPUTASI, DAN SAINS DATA
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2018



THESIS - SM 142501

**A MODIFIED DULMAGE-MENDELSON
DECOMPOSITION ON REDUCIBLE REGULAR
SQUARE MATRICES OVER MAX-PLUS
ALGEBRA**

MUHAMAD SUEF
NRP 0611 1650 010 018

SUPERVISOR:
Dr. Subiono, M.S.

MASTER PROGRAM
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF MATHEMATICS, COMPUTING, AND DATA SCIENCE
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2018

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)

di

Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh:

MUHAMAD SUEF
NRP. 0611 1650 010 018

Tanggal Ujian : 02 Juli 2018
Periode Wisuda : September 2018

Disetujui oleh:



Dr. Subiono, M.S.
NIP 19570411 198403 1 001

(Pembimbing)



Dr. Mahmud Yunus, M.Si.
NIP 19620407 198703 1 005

(Penguji)



Dr. Budi Setiyono, S.Si, M.T.
NIP 19720207 199702 1 001

(Penguji)

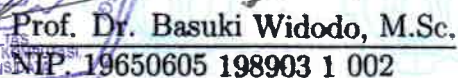


Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.
NIP 19830517 200812 1 003

(Penguji)



Dekan FMKSD,



Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP. 19650605 198903 1 002

MODIFIKASI DEKOMPOSISI DULMAGE-MENDELSON PADA MATRIKS PERSEGI REGULER TEREDUKSI ATAS ALJABAR MAX-PLUS

Nama Mahasiswa : MUHAMAD SUEF
NRP : 0611 1650 010 018
Pembimbing : Dr. Subiono, M.S.

ABSTRAK

Matriks blok segitiga atas merupakan suatu bentuk dari matriks persegi yang diperoleh dengan melakukan permutasi pada baris dan kolomnya, hal ini dapat dijelaskan secara umum menggunakan dekomposisi Dulmage-Mendelsohn. Dalam penelitian tesis ini, dilakukan modifikasi pada algoritma dekomposisi Dulmage-Mendelsohn sehingga diperoleh bentuk matriks blok segitiga atas yang semua blok diagonalnya merupakan matriks persegi. Kemudian untuk mencari *matching* maksimum pada graf bipartisi digunakan algoritma *matching* maksimum yang memperhatikan banyaknya garis penghubung disetiap titiknya. Algoritma ini memiliki waktu komputasi lebih cepat dibanding dengan algoritma *matching* maksimum yang memperhatikan eksistensi *augmenting path* pada graf bipartisi. Matriks A dengan kardinalitas *matching* maksimumnya sama dengan banyak elemen diagonalnya yang tak nol memiliki bentuk matriks blok segitiga atas hasil dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi yaitu $\bar{A} = PAP^T$. Matriks blok segitiga atas \bar{A} ini digunakan untuk menganalisis terkait vektor waktu-sikel dari matriks persegi reguler tereduksi A atas aljabar max-plus, dimana vektor waktu-sikel ini sangat erat kaitannya dengan nilai eigen dan *eigenmode* dari matriks A .

Kata-kunci: dekomposisi Dulmage-Mendelsohn, aljabar max-plus, vektor waktu-sikel, eigenmode

A MODIFIED DULMAGE-MENDELSON DECOMPOSITION ON REDUCIBLE REGULAR SQUARE MATRICES OVER MAX-PLUS ALGEBRA

Name : MUHAMAD SUEF
NRP : 0611 1650 010 018
Supervisor : Dr. Subiono, M.S.

ABSTRACT

The upper block-triangular matrix is a square matrix which is obtained by permutation process on its rows and columns, it could be explained generally by using Dulmage-Mendelsohn decomposition. In this research, modification was done on Dulmage-Mendelsohn decomposition algorithm so that the form of the upper block-triangular matrix was obtained which all diagonal blocks were square matrices. Then to find the maximum matching on the bipartite graph we use the algorithm that respect to the number of connecting edge at each vertices. This algorithm has a faster computation time than the algorithm that respect to the existence of augmenting path in the bipartite graph. The matrix A with cardinality maximum matching is the same as the number of diagonal elements whose nonzero has a upper block-triangular matrix form of the modified Dulmage-Mendelsohn decomposition result was $\bar{A} = PAP^T$. This upper block-triangular matrix \bar{A} was used to analyze the cycle-time vector of the reducible regular square matrix A over max-plus algebra, where this cycle-time vector was closely related to eigenvalues and eigenmode from the matrix A .

Key-words: *Dulmage-Mendelsohn decomposition, max-plus algebra, cycle-time vector, eigenmode*

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga penulis diberikan suatu kesempatan untuk menyelesaikan tesis yang berjudul

MODIFIKASI DEKOMPOSISI DULMAGE-MENDELSON PADA MATRIKS PERSEGI REGULER TEREDUKSI ATAS ALJABAR MAX-PLUS

tesis ini dibuat untuk memenuhi salah satu syarat dalam memperoleh gelar Magister Program Magister Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Penyusunan tesis ini tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak. oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih kepada pihak-pihak tersebut diantaranya:

1. Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
2. Dekan Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
3. Kepala Departemen Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
4. Kepala Program Studi Magister Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
5. Dr. Subiono, M.S. selaku dosen yang senantiasa membimbing penulis dalam menyelesaikan penelitian tesis ini.
6. Dr. Mahmud Yunus, M.Si., Dr. Budi Setiyono, S.Si, M.T., dan Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si. selaku dosen penguji yang telah banyak memberikan masukan dalam penyelesaian tesis ini.
7. Dr. Dwi Ratna Sulistyaningrum, S.Si., M.T. selaku dosen wali penulis selama menempuh program studi Magister Matematika.
8. Teman-teman seperjuangan di Program Studi Magister Matematika. Terimakasih banyak atas segala sesuatunya yang telah diberikan selama menjalani perkuliahan Magister Matematika.
9. Staff Pasca Sarjana Matematika, Mbak Resty dan Mas Afif. Terimakasih banyak atas bantuan dalam menginformasikan keperluan administrasi dan bersedia menampung keluh kesah penulis selama proses penyelesaian tesis hingga kelulusan.

10. Kakak dan Adik angkatan di Program Studi Magister Matematika, serta semua pihak yang telah memberikan do'a dan dukungannya kepada penulis, yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.
11. Ibu, kakak, adik dan khususnya almarhum bapak yang selalu memberikan do'a serta dukungan selama menempuh program studi Magister Matematika. Semoga beliau senantiasa diberi limpahan rahmat-Nya, aamiin ya robbal 'alamiin.

Penulis menyadari bahwa dalam tesis ini masih terdapat kelemahan dan kekurangan, oleh karena itu penulis sangat terbuka menerima saran dan ide demi kesempurnaan penulisan selanjutnya. Penulis berharap semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi pembaca, dan semua yang telah dikerjakan ini mendapat ridho dari Allah SWT.

Surabaya, Agustus 2018

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR NOTASI	xvii
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	4
BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Penelitian-Penelitian Terdahulu	5
2.2 Matriks Blok Segitiga Atas	6
2.2.1 Dekomposisi <i>Strongly Connected</i>	7
2.2.2 Dekomposisi Dulmage-Mendelsohn	10
2.3 Aljabar Max-Plus	26
2.3.1 Definisi dan konsep-konsep dasar Aljabar Max-Plus	26
2.3.2 Matriks dan Vektor atas Aljabar Max-Plus	27
2.4 Teori Spektral	33
2.4.1 Matriks dan Teori Graf	33
2.4.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen	36
2.4.3 <i>Eigenmode</i>	39
BAB 3 METODE PENELITIAN	41
BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN	43
4.1 Modifikasi Dekomposisi Dulmage-Mendelsohn atas Aljabar Max-Plus	43
4.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen pada Matriks Tereduksi atas Aljabar Max-Plus	61
4.3 <i>Eigenmode</i> pada Matriks Tereduksi atas Aljabar Max-Plus	69

BAB 5	KESIMPULAN DAN SARAN	73
5.1	Kesimpulan	73
5.2	Saran	73
DAFTAR PUSTAKA		75
LAMPIRAN		77
BIOGRAFI PENULIS		91

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Representasi graf $\mathcal{G}(A)$	8
Gambar 2.2	Dekomposisi <i>strongly connected</i> pada graf $\mathcal{G}(A)$	9
Gambar 2.3	Representasi graf bipartisi $G(A)$	11
Gambar 2.4	<i>Matching</i> maksimum M pada $G(A)$	14
Gambar 2.5	Dekomposisi Dulmage-Mendelsohn pada graf $G(A)$	19
Gambar 2.6	Graf bantu $\tilde{G}_M(A) = (N^+ \cup N^-, \tilde{D})$	24
Gambar 2.7	Graf $\mathcal{G}(A)$	34
Gambar 2.8	Graf <i>strongly connected</i> $\mathcal{G}(B)$	35
Gambar 4.1	Graf bantu $\tilde{G}_M(A) = (N^+ \cup N^-, \tilde{D}^*)$	45
Gambar 4.2	Dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi pada $G(A)$	46
Gambar 4.3	<i>Matching</i> maksimum M menggunakan Algoritma 4	50
Gambar 4.4	Graf bantu $\tilde{G}_M(A) = (N^+ \cup N^-, \tilde{D}^*)$	52
Gambar 4.5	Dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi pada $G(A)$	53

DAFTAR NOTASI

\mathbb{R}	: Himpunan bilangan real.
$+$: Operasi “jumlah” pada \mathbb{R} .
\times	: Operasi “kali” pada \mathbb{R} .
\mathbb{R}_ε	: Himpunan bilangan real beserta elemen $\varepsilon \stackrel{def}{=} -\infty$.
\oplus	: Operasi “max” pada \mathbb{R}_ε .
\otimes	: Operasi “+” pada \mathbb{R}_ε .
\mathbb{R}_{\max}	: Himpunan \mathbb{R}_ε beserta operasi \oplus dan \otimes .
\mathbb{N}	: Himpunan bilangan asli.
\underline{n}	: Himpunan n bilangan asli pertama $\{1, 2, \dots, n\}$.
$\mathbb{R}_\varepsilon^{n \times m}$: Himpunan matriks berukuran $n \times m$ dengan entri-entri-nya merupakan bilangan di \mathbb{R}_ε .
$[A]_{i,j}$: Entri baris ke- i kolom ke- j dari matriks $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times m}$.
$\mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$: Himpunan $\mathbb{R}_\varepsilon^{n \times m}$ beserta operasi \oplus dan \otimes .
\mathbb{R}_ε^n	: Himpunan vektor berdimensi n atas aljabar biasa.
\mathbb{R}_{\max}^n	: Himpunan \mathbb{R}_ε^n beserta operasi \oplus dan \otimes .
$\mathcal{G}(A) = (\mathcal{N}, \mathcal{D})$: Graf representasi matriks A dengan himpunan titik \mathcal{N} dan himpunan garis \mathcal{D} .
$\mathbf{G}(A) = (\mathbf{N}^+, \mathbf{N}^-; \mathbf{D})$: Graf bipartisi representasi matriks A dengan himpunan titik \mathbf{N}^+ , \mathbf{N}^- dan himpunan garis \mathbf{D} .
\mathbf{M}	: Himpunan <i>matching</i> pada graf bipartisi \mathbf{G} .
(U^+, U^-)	: Himpunan <i>cover</i> pada graf bipartisi \mathbf{G} .
$\xrightarrow{*}$: Notasi keterhubungan (<i>reachable</i>) antara dua titik.
\nrightarrow^*	: Notasi tidak adanya keterhubungan (<i>reachable</i>) antara dua titik.
\sim	: Notasi keterhubungan (<i>reachable</i>) antara dua titik satu sama lain.
\square	: Tanda berhentinya suatu pembuktian.

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar max-plus merupakan salah satu ilmu matematika yang telah banyak mengalami perkembangan. Hal ini dikarenakan teori matriks atas aljabar max-plus dapat diaplikasikan ke dalam suatu Sistem Event Diskrit (SED), dimana dalam SED ini dapat digunakan untuk memodelkan beberapa permasalahan dalam dunia industri maupun akademik. Dalam suatu SED yang berbentuk $\mathbf{x}(k+1) = A \otimes \mathbf{x}(k)$ terdapat tiga komponen penting terkait matriks A yaitu nilai eigen, vektor eigen, dan *eigenmode*. Beberapa penelitian telah dilakukan untuk mengembangkan teori terkait tiga komponen tersebut, khususnya pada matriks persegi reguler tereduksi atas aljabar max-plus. Matriks reguler tereduksi atas aljabar max-plus memiliki nilai eigen yang berhingga dan terkadang tidak tunggal (Subiono, 2017), hal inilah yang menjadikan matriks tereduksi tampak menarik untuk diteliti lebih lanjut.

Suatu matriks persegi reguler tereduksi A merupakan matriks dengan representasi graf tidak *strongly connected*. Lebih lanjut, matriks A dapat didekomposisi menjadi matriks blok segitiga atas, hal ini dapat dijelaskan menggunakan metode dekomposisi *strongly connected* (Murota, 2000). Bentuk matriks blok segitiga atas hasil dekomposisi ini dinotasikan sebagai $\bar{A} = PAP^T$ dengan P merupakan matriks permutasi dengan ukuran yang bersesuaian dengan matriks A . Matriks \bar{A} memiliki blok diagonal berupa matriks persegi reguler tak-tereduksi, yaitu matriks persegi reguler yang tidak dapat didekomposisi lagi menjadi matriks blok segitiga atas. Lebih umum lagi, terdapat suatu metode dekomposisi untuk mendekomposisi sebarang matriks persegi A_1 menjadi matriks blok segitiga atas, disebut dekomposisi Dulmage-Mendelsohn (Murota, 2000). Bentuk matriks blok segitiga atas hasil dekomposisi ini dinotasikan sebagai $\bar{A}_1 = PA_1Q$ dengan P dan Q masing-masing merupakan matriks permutasi baris dan kolom dengan ukuran yang bersesuaian dengan matriks A_1 . Perbedaan metode ini dari metode dekomposisi *strongly connected* adalah bentuk blok diagonal dari matriks \bar{A}_1 berupa matriks persegi atau matriks persegi panjang yang tidak dapat didekomposisi lagi menjadi matriks blok segitiga atas yang lebih sederhana.

Dalam hal ini, metode dekomposisi Dulmage-Mendelsohn tidak dapat langsung digunakan untuk mendekomposisi matriks persegi reguler tereduksi A sebab hasil blok diagonalnya yang masih memungkinkan berbentuk persegi panjang.

Dalam (Subiono, 2017) dijelaskan mengenai nilai eigen dari matriks persegi reguler tereduksi A atas aljabar max-plus. Nilai eigen dari matriks A tersebut erat kaitannya dengan vektor waktu-sikel dari sistemnya yaitu $\boldsymbol{\eta} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k)}{k}$. Setiap entri-entri dari vektor $\boldsymbol{\eta}$ yang berbeda dinotasikan sebagai η_i merupakan calon nilai eigen dari matriks A . Telah dijelaskan sebelumnya, bahwa matriks A ini memiliki representasi graf yang tidak *strongly connected* dan selalu dapat didekomposisi menjadi matriks blok segitiga atas $\bar{A} = PAP^\top$. Sistem yang dibangun oleh matriks A merupakan ekuivalen dengan sistem yang dibangun oleh matriks \bar{A} . Dalam hal ini, matriks \bar{A} memiliki bentuk vektor waktu-sikel dengan susunan entri-entrinya lebih teratur dibanding vektor waktu-sikel dari matriks A . Oleh sebab itu, matriks \bar{A} lebih mudah dianalisis terkait vektor waktu-sikelnnya dibandingkan dengan matriks A . Namun, algoritma yang telah ada belum bisa digunakan secara efektif untuk mendekomposisi matriks A kedalam bentuk matriks blok segitiga atas \bar{A} .

Dalam (Subiono, 2017) juga dijelaskan terkait *eigenmode* dari matriks A yang dinotasikan sebagai $(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}_{\max}^n \times \mathbb{R}_{\max}^n$ yang memenuhi $A \otimes (k \times \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{v}) = (k + 1) \times \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{v}$ untuk $k \in \mathbb{N}_0^+$. Sama halnya dengan nilai eigen dari matriks A , *eigenmode* dari matriks A juga erat kaitannya terhadap vektor waktu-sikel sistemnya. Dalam (Königsberg, 2009) diperoleh suatu algoritma untuk memperoleh *eigenmode* matriks tereduksi reguler atas aljabar max-plus. Algoritma ini dijalankan dengan terlebih dahulu mendekomposisi matriks A menjadi matriks blok segitiga atas \bar{A} . Namun pada saat itu belum diberikan sebuah algoritma untuk mendekomposisi matriks blok segitiga atas secara umum, sehingga untuk contoh-contohnya masih diberikan secara langsung dalam bentuk matriks blok segitiga atas. Dalam kenyataannya, matriks tereduksi pada suatu SED tidak selalu diperoleh dalam bentuk matriks blok segitiga atas, sehingga butuh suatu algoritma untuk mendekomposisi sebarang matriks tereduksi menjadi matriks blok segitiga atas. Kemudian penelitian ini dilanjutkan oleh (Mursyidah dan Subiono, 2017) namun juga belum memberikan sebuah algoritma untuk mendekomposisi matriks blok segitiga atas secara umum.

Berdasarkan beberapa permasalahan yang telah dipaparkan, maka dalam penelitian tesis ini dilakukan modifikasi pada algoritma dekomposisi Dulmage-Mendelsohn supaya diperoleh hasil berupa matriks blok segitiga atas yang

semua blok diagonalnya merupakan matriks persegi. Kemudian dianalisis sifat-sifat matriks persegi reguler tereduksi A yang matriks blok segitiga atasnya $\bar{A} = PAQ$ dengan $Q = P^\top$, hal ini supaya matriks \bar{A} dapat digunakan untuk menganalisis vektor waktu-sikel dari matriks A . Untuk nilai eigen pada matriks persegi reguler tereduksi dapat diperoleh langsung dari entri-entri vektor waktu-sikel matriks blok segitiga atasnya. Dengan demikian dapat diperoleh keseluruhan nilai eigen yang mungkin pada matriks persegi reguler tereduksi atas aljabar max-plus.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, penulis mempunyai permasalahan yaitu adanya kesulitan untuk mendekomposisi matriks persegi reguler tereduksi A atas aljabar max-plus kedalam bentuk matriks blok segitiga atas \bar{A} menggunakan metode dekomposisi Dulmage-Mendelsohn. Dalam hal ini, matriks blok segitiga atas \bar{A} dapat digunakan untuk membantu menentukan vektor waktu-sikel dari matriks A , dimana vektor waktu-sikel ini erat kaitannya dengan nilai eigen dan *eigenmode* dari matriks A . Dengan demikian penulis memperoleh beberapa rumusan masalah sebagai berikut,

1. Bagaimana cara memodifikasi algoritma dekomposisi Dulmage-Mendelsohn sehingga dapat diperoleh hasil berupa matriks blok segitiga atas yang semua blok diagonalnya merupakan matriks persegi?
2. Bagaimana cara menentukan keseluruhan nilai eigen yang mungkin dari matriks blok segitiga atas hasil dari dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi pada matriks persegi reguler tereduksi atas aljabar max-plus?
3. Bagaimana menerapkan dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi pada algoritma *eigenmode* matriks persegi reguler tereduksi atas aljabar max-plus?

1.3 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini permasalahan yang akan dibahas dibatasi pada matriks persegi reguler tereduksi atas aljabar max-plus.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dalam perencanaan penelitian tesis ini adalah sebagai berikut.

1. Mendapatkan modifikasi dari algoritma dekomposisi Dulmage-Mendelsohn yang sesuai untuk mendekomposisi matriks tereduksi atas aljabar max-plus menjadi matriks blok segitiga atas dengan blok diagonalnya merupakan matriks persegi yang tidak dapat didekomposisi lagi menjadi matriks blok segitiga atas yang lebih sederhana.
2. Mendapatkan keseluruhan nilai eigen yang mungkin pada matriks tereduksi atas aljabar max-plus dengan menganalisisnya pada bentuk matriks blok segitiga atas hasil dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi.
3. Matriks blok segitiga atas hasil modifikasi dekomposisi ini dapat diterapkan pada langkah kedua algoritma *eigenmode* matriks persegi reguler tereduksi atas aljabar max-plus.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini yaitu diperolehnya suatu modifikasi dari algoritma dekomposisi Dulmage-Mendelsohn yang dapat digunakan untuk mendekomposisi matriks persegi menjadi matriks blok segitiga atas dengan blok diagonalnya merupakan matriks persegi yang tidak dapat didekomposisi lagi menjadi matriks blok segitiga atas yang lebih sederhana. Hasil modifikasi dekomposisi ini dapat digunakan untuk menganalisis nilai eigen dan *eigenmode* pada matriks persegi reguler tereduksi atas aljabar max-plus.

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Penelitian-Penelitian Terdahulu

Dalam subbab ini dipaparkan mengenai penelitian-penelitian terdahulu. Beberapa dari penelitian tersebut yaitu (Murota, 2000), (Königsberg, 2009) dan (Mursyidah dan Subiono, 2017). Hasil dari penelitian (Murota, 2000) merupakan landasan teori untuk menyelesaikan permasalahan utama dalam penelitian tesis ini, sedangkan beberapa yang lain (Königsberg, 2009) dan (Mursyidah dan Subiono, 2017) merupakan suatu hasil yang dapat dikembangkan dalam hasil penelitian ini. Berikut paparan dari penelitian-penelitian tersebut.

- (a). Pada penelitian yang dilakukan oleh A. L. Dulmage and N. S. Mendelsohn pada tahun 1958 yang kemudian hasil ini dikaji ulang oleh Kazuo Murota pada tahun 2000 dalam bukunya yang berjudul “Matrices and Matroids for Systems Analysis”, telah diperoleh suatu metode dekomposisi yang dilakukan pada graf bipartisi terkait dengan *matching* maksimumnya, metode ini dikenal sebagai dekomposisi Dulmage-Mendelsohn. Dekomposisi ini dapat digunakan untuk mendekomposisi sebarang matriks persegi A menjadi matriks blok segitiga atas \bar{A} . Matriks \bar{A} ini memiliki blok diagonal berupa matriks persegi atau matriks persegi panjang yang tidak dapat didekomposisi lagi menjadi matriks blok segitiga atas yang lebih sederhana. Dalam (Murota, 2000) juga diberikan sebuah algoritma dekomposisi Dulmage-Mendelsohn, algoritma ini dapat mempermudah dalam proses perhitungan dekomposisi Dulmage-Mendelsohn.
- (b). Pada penelitian yang dilakukan oleh Zvi Retchkiman Königsberg pada tahun 2009 dalam jurnalnya yang berjudul “A Generalized Eigenmode Algorithm for Reducible Regular Matrices over the Max-Plus Algebra”, telah dikonstruksi sebuah algoritma untuk menentukan *eigenmode* tergeneralisasi dari matriks persegi reguler tereduksi A atas aljabar max-plus. Telah dijelaskan sebelumnya bahwa setiap matriks tereduksi A dapat didekomposisi menjadi matriks blok segitiga atas \bar{A} . Algoritma

ini dilakukan pada matriks blok segitiga atas \bar{A} , namun pada saat itu belum diberikan suatu metode dekomposisi untuk matriks A , sehingga untuk contoh-contohnya langsung diberikan dalam bentuk matriks blok segitiga atas.

- (c). Penelitian dari (Königsberg, 2009) dilanjutkan oleh Himmatul Mursyidah dan Subiono pada tahun 2017, namun belum juga memberikan suatu algoritma untuk mendekomposisi matriks blok segitiga atas sehingga contoh-contoh yang diberikanpun masih dalam bentuk matriks blok segitiga atas.

2.2 Matriks Blok Segitiga Atas

Dalam subbab ini dijelaskan mengenai dua metode dekomposisi matriks blok segitiga atas yaitu dekomposisi *strongly connected* dan dekomposisi Dulmage-Mendelsohn yang masing-masing dijelaskan dalam Bagian 2.2.1 dan Bagian 2.2.2. Dekomposisi *strongly connected* dilakukan dengan cara mempartisi graf representasi sebarang matriks persegi reguler tereduksi A_1 menjadi subgraf-subgraf *strongly connected*, dimana hasil partisi ini merepresentasikan matriks permutasi baris P_1 sedemikian hingga diperoleh matriks blok segitiga atas $\bar{A}_1 = P_1 A_1 P_1^\top$. Sedangkan dekomposisi Dulmage-mendelsohn dilakukan dengan cara mempartisi graf bipartisi sebarang matriks persegi A_2 berdasarkan *matching* maksimumnya, dimana hasil partisi ini merepresentasikan matriks permutasi baris P dan matriks permutasi kolom Q sedemikian hingga diperoleh matriks blok segitiga atas $\bar{A}_2 = P A_2 Q$.

Perlu diperhatikan bahwasannya kedua metode dekomposisi tersebut sangat erat kaitannya dengan apa yang dinamakan matriks permutasi. Didefinisikan matriks permutasi $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ yaitu suatu matriks persegi dengan entri-entri $\{0, 1\}$ dimana untuk setiap baris maupun kolomnya tepat memiliki satu entri 1 dan lainnya 0. Jika P merupakan matriks permutasi maka $PP^\top = I$ dengan I merupakan matriks identitas. Diberikan pemetaan $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ yang merepresentasikan hasil permutasi dari n elemen, dalam hal ini hasil pemetaan π dapat ditulis sebagai

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Kemudian berikut diberikan definisi matriks permutasi baris dan kolom,

Definisi 2.2.1 (Brualdi dan Nikeghbali, 2006). *Diberikan suatu pemetaan*

permutasi $\pi : \underline{n} \rightarrow \underline{n}$. Untuk matriks persegi $P \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ dengan entri-entrinya $[P]_{i, \pi(i)} = 1$ dan 0 untuk yang lainnya disebut matriks permutasi baris. Sedangkan untuk matriks persegi $Q \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ dengan entri-entrinya $[Q]_{\pi(j), j} = 1$ dan 0 untuk yang lainnya disebut matriks permutasi kolom.

Untuk suatu matriks $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, interpretasi matriks permutasi baris P pada matriks persegi A adalah setiap baris ke- i pada matriks A di tukar menjadi baris ke- $\pi(i)$. Sedangkan interpretasi matriks permutasi Q pada matriks A adalah setiap kolom ke- j pada matriks A di tukar menjadi kolom ke- $\pi(j)$. Dengan demikian, interpretasi matriks permutasi P dan Q pada matriks A untuk PAQ adalah setiap entri-entri matriks A yaitu $[A]_{i,j}$ ditukar dengan $[A]_{\pi(i), \pi(j)}$.

2.2.1 Dekomposisi *Strongly Connected*

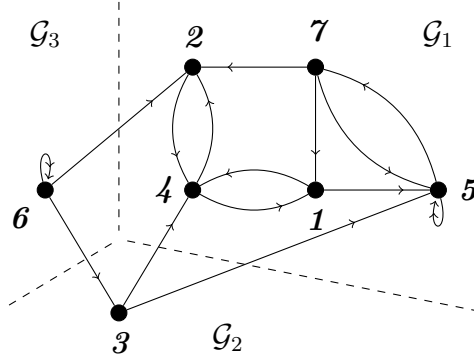
Diberikan matriks A berukuran $n \times n$ yang entri-entrinya pada baris ke- i dan kolom ke- j dinotasikan sebagai $[A]_{i,j} = a_{i,j}$. Representasi graf berarah dari matriks A yaitu $\mathcal{G}(A) = (\mathcal{N}, \mathcal{D})$ dengan himpunan titiknya $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$ dan himpunan garisnya $\mathcal{D} = \{(j, i) \mid a_{i,j} \neq 0\}$ (Murota, 2000). Dalam buku tesis ini, terkadang notasi $\mathcal{G}(A)$ cukup ditulis sebagai \mathcal{G} .

Contoh 2.2.2. Diberikan matriks persegi $A \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ yang dituliskan sebagaimana berikut supaya memudahkan dalam penjelasannya,

$$A = \begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & a_{1,4} & 0 & 0 & a_{1,7} \\ 2 & 0 & 0 & 0 & a_{2,4} & 0 & a_{2,6} & a_{2,7} \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{3,6} & 0 \\ 4 & a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & a_{5,1} & 0 & a_{5,3} & 0 & a_{5,5} & 0 & a_{5,7} \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{6,6} & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,5} & 0 & 0 \end{array}$$

dengan $a_{1,4}, a_{1,7}, a_{2,4}, a_{2,6}, a_{2,7}, a_{3,6}, a_{4,1}, a_{4,2}, a_{4,3}, a_{5,1}, a_{5,3}, a_{5,5}, a_{5,7}, a_{6,6}, a_{7,5} \neq 0$. Untuk matriks A diatas dapat direpresentasikan sebagai graf berarah $\mathcal{G}(A) = (\mathcal{N}, \mathcal{D})$ dengan himpunan titiknya $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ dan himpunan garisnya $\mathcal{D} = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (5, 5), (5, 7), (6, 2), (6, 3), (6, 6), (7, 1), (7, 2), (7, 5)\}$ sebagaimana diperlihatkan dalam bentuk graf berikut,

$\{1, 2, 4, 5, 7\}$, $\mathcal{N}_2 = \{3\}$ dan $\mathcal{N}_3 = \{6\}$ dengan $\mathcal{N}_1 \preceq \mathcal{N}_2 \preceq \mathcal{N}_3$. Berdasarkan $\{\mathcal{N}_k \mid k = 1, 2, 3\}$ dapat diperoleh subgraf $\{\mathcal{G}_k(A) = (\mathcal{N}_k, \mathcal{D}_k) \mid k = 1, 2, 3\}$ dengan $\mathcal{D}_1 = \{(2, 4), (4, 2), (4, 1), (1, 4), (7, 2), (7, 1), (1, 5), (5, 7), (7, 5)\}$, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$, $\mathcal{D}_3 = \{(6, 6)\}$. Dalam hal ini, hasil dekomposisi strongly connected pada graf $\mathcal{G}(A)$ yaitu $\{\mathcal{G}_k(A) = (\mathcal{N}_k, \mathcal{D}_k) \mid k = 1, 2, 3\}$ sebagaimana ditunjukkan oleh garis putus-putus dalam bentuk graf berikut.



Gambar 2.2: Dekomposisi strongly connected pada graf $\mathcal{G}(A)$

Hasil dari dekomposisi *strongly connected* yaitu berupa kelas-kelas ekivalen $\{\mathcal{N}_k \mid k = 1, 2, \dots, b\}$ yang sebenarnya merupakan suatu bentuk dari hasil permutasi n elemen. Suatu matriks permutasi baris P dapat dikonstruksi dari hasil permutasi n elemen tersebut sedemikian hingga dapat diperoleh bentuk matriks blok segitiga atas $\bar{A} = PAP^T$, atau dengan kata lain bentuk matriks blok segitiga atas \bar{A} dapat diperoleh dengan cara melakukan permutasi pada baris dan kolom matriks A sesuai dengan hasil permutasi n elemen tersebut.

Contoh 2.2.4. Perhatikan kembali matriks A pada Contoh 2.2.2 dan hasil dekomposisi strongly connected graf $\mathcal{G}(A)$ pada Contoh 2.2.3. Berdasarkan partisi dari \mathcal{N} yaitu $\{\mathcal{N}_1; \mathcal{N}_2; \mathcal{N}_3\} = \{1, 2, 4, 5, 7; 3; 6\}$ merepresentasikan suatu bentuk dari permutasi 7 elemen yaitu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ dimana dari hasil permutasi 7 elemen tersebut dapat dikonstruksi matriks permutasi baris P . Berdasarkan teori terkait matriks permutasi yang telah dijelaskan sebelumnya maka matriks P memiliki entri-entri $[P]_{1,1} = [P]_{2,2} = [P]_{3,4} = [P]_{4,5} = [P]_{5,7} = [P]_{6,3} = [P]_{7,6} = 1$ dan 0 untuk yang lainnya. Matriks

permutasi P dapat dituliskan sebagai berikut,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian, dari matriks permutasi P tersebut dapat diperoleh hasil dekomposisi matriks A menjadi matriks blok segitiga atas \bar{A} yaitu

$$\bar{A} = PAP^T$$

		1	2	4	5	7	3	6
1		0	0	$a_{1,4}$	0	$a_{1,7}$	0	0
2		0	0	$a_{2,4}$	0	$a_{2,7}$	0	$a_{2,6}$
4		$a_{4,1}$	$a_{4,2}$	0	0	0	$a_{4,3}$	0
5		$a_{5,1}$	0	0	$a_{5,5}$	$a_{5,7}$	$a_{5,3}$	0
7		0	0	0	$a_{7,5}$	0	0	0
3		0	0	0	0	0	0	$a_{3,6}$
6		0	0	0	0	0	0	$a_{6,6}$

Perhatikan kembali matriks \bar{A} diatas, tampak bahwa matriks \bar{A} merupakan hasil dari permutasi pada baris dan kolom matriks A yang sesuai dengan partisi $\{\mathcal{N}_1; \mathcal{N}_2; \mathcal{N}_3\} = \{1, 2, 4, 5, 7; 3; 6\}$.

2.2.2 Dekomposisi Dulmage-Mendelsohn

Diberikan matriks A berukuran $n \times n$ yang entri-entrinya pada baris ke- i dan kolom ke- j dinotasikan sebagai $[A]_{i,j} = a_{i,j}$. Representasi graf bipartisi dari matriks A yaitu $G(A) = (\mathbf{N}^+, \mathbf{N}^-; \mathbf{D})$ dengan himpunan titiknya terdiri dari dua himpunan yang saling asing dinotasikan sebagai \mathbf{N}^+ dan \mathbf{N}^- dengan masing-masing himpunan titik tersebut memiliki sebanyak n titik (Murota, 2000). Untuk \mathbf{N}^+ merepresentasikan himpunan kolom pada matriks A , ditulis sebagai $\mathbf{N}^+ = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$. Sedangkan untuk \mathbf{N}^- merepresentasikan himpunan baris pada matriks A , ditulis sebagai $\mathbf{N}^- = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$. Himpunan garis di $G(A)$ didefinisi sebagai $\mathbf{D} = \{(c_j, r_i) \mid c_j \in \mathbf{N}^+, r_i \in \mathbf{N}^-, a_{i,j} \neq 0\}$ (Murota, 2000). Dalam buku tesis ini, terkadang notasi $G(A)$

cukup ditulis sebagai G .

Untuk $M(\subseteq D)$, dinotasikan ∂^+M dan ∂^-M masing-masing sebagai himpunan semua titik di N^+ dan N^- yang terhubung oleh setiap garis di M . Kemudian dinotasikan pula $\partial M = \partial^+M \cup \partial^-M$ (Murota, 2000). *Matching* M merupakan suatu himpunan bagian dari D sedemikian hingga tidak ada dua garis di M yang menghubungkan titik yang sama di N^+ ataupun di N^- . Dengan kata lain, M merupakan *matching* jika dan hanya jika $|M| = |\partial^+M| = |\partial^-M|$ (Murota, 2000). Dalam hal ini, untuk setiap titik $u \in \partial M$ disebut *match* di G , sedangkan untuk setiap $v \notin \partial M$ disebut sebagai titik *unmatch* di G . *M-alternating path* adalah suatu *path* yang garisnya secara bergantian di M dan tidak di M . Sedangkan *M-augmenting path* merupakan suatu *M-alternating path* dengan titik awal dan titik akhirnya tidak di ∂M . *Cover* merupakan suatu pasangan (U^+, U^-) dengan $U^+ \subseteq N^+$ dan $U^- \subseteq N^-$ sedemikian hingga tidak ada garis yang menghubungkan suatu titik di $N^+ \setminus U^+$ ke suatu titik di $N^- \setminus U^-$ (Murota, 2000). Kardinalitas dari *cover* (U^+, U^-) didefinisikan oleh $|U^+| + |U^-|$. Selanjutnya untuk menjelaskan beberapa istilah yang telah dibahas diberikan beberapa contoh sebagai berikut,

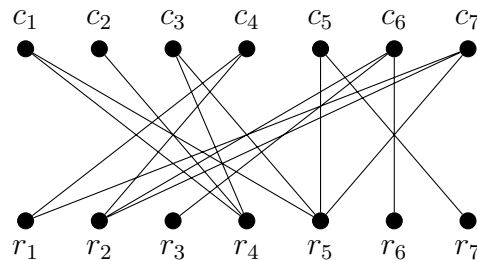
Contoh 2.2.5. Perhatikan kembali matriks A pada Contoh 2.2.2. Representasi graf bipartisi dari matriks A adalah $G(A) = (N^+, N^-; D)$ dengan himpunan titik dan garisnya yaitu,

$$N^+ = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7\}$$

$$N^- = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7\}$$

$$D = \{(c_1, r_4), (c_1, r_5), (c_2, r_4), (c_3, r_4), (c_3, r_5), (c_4, r_1), (c_4, r_2), (c_5, r_5), (c_5, r_7), (c_6, r_2), (c_6, r_3), (c_6, r_6), (c_7, r_1), (c_7, r_2), (c_7, r_5)\}$$

sebagaimana diberikan dalam graf berikut,



Gambar 2.3: Representasi graf bipartisi $G(A)$.

Perlu diperhatikan bahwa Gambar 2.3 yaitu gambar representasi graf bipartisi $G(A)$ sangat berbeda dengan Gambar 2.2 yaitu gambar dekomposisi strongly

connected pada graf $\mathcal{G}(A)$, tetapi kedua graf tersebut mempunyai matriks representasi yang sama yaitu matriks A pada Contoh 2.4.1. Berdasarkan pembahasan sebelumnya, dari graf $\mathcal{G}(A)$ maka dapat dipilih himpunan matching $M = \{(c_1, r_4), (c_7, r_1), (c_5, r_5), (c_6, r_6)\}$ dengan $\partial^+ M = \{c_1, c_7, c_5, c_6\}$ dan $\partial^- M = \{r_4, r_1, r_5, r_6\}$. Tampak bahwa tidak ada dua garis di M yang menghubungkan titik yang sama di N^+ ataupun di N^- , dan juga $|M| = |\partial^+ M| = |\partial^- M| = 4$. Kemudian dari matching M terdapat M -augmenting path p yaitu $p = (c_3, r_4) (r_4, c_1) (c_1, r_5) (r_5, c_5) (c_5, r_7)$ dengan $(c_3, r_4), (c_1, r_5), (c_5, r_7) \notin M$, $(r_4, c_1), (c_5, r_5) \in M$ dan titik awal dan titik akhirnya berturut-turut $c_3, r_7 \notin \partial M$. Kemudian berdasarkan graf $\mathcal{G}(A)$ dapat di peroleh cover $(U^+, U^-) = (\{c_4, c_5, c_6, c_7\}, \{r_4, r_5, r_6, r_7\})$ dimana tidak ada garis yang menghubungkan suatu titik di $N^+ \setminus U^+ = \{c_1, c_2, c_3\}$ ke suatu titik di $N^- \setminus U^- = \{r_1, r_2, r_3\}$. Kardinalitas dari cover (U^+, U^-) adalah $|(U^+, U^-)| = |U^+| + |U^-| = 4 + 4 = 8$

Cover dengan kardinalitas minimum disebut *cover minimum*. Dinotasikan $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ sebagai sekumpulan dari cover minimum di \mathcal{G} . Kemudian suatu matching di \mathcal{G} dengan kardinalitas maksimum disebut *matching maksimum*. Kardinalitas dari matching maksimum di \mathcal{G} dinotasikan sebagai $v(\mathcal{G})$. Suatu matching M dengan $\partial^+ M = N^+$ dan $\partial^- M = N^-$ disebut sebagai *matching sempurna*. Suatu garis di \mathcal{G} dikatakan *admissible* jika garis tersebut merupakan elemen dari beberapa himpunan matching maksimum di \mathcal{G} . Keberadaan matching maksimum M sangat erat kaitannya dengan M -augmenting path sebagaimana dijelaskan dalam teorema berikut.

Teorema 2.2.6 (Ahuja, 1993). Diberikan graf bipartisi $\mathcal{G} = (N^+, N^-; D)$. Himpunan $M \subseteq D$ adalah matching maksimum jika dan hanya jika tidak terdapat M -augmenting path pada graf bipartisi \mathcal{G} .

Bukti. (\Rightarrow) Asumsikan $M \subseteq D$ dengan $|M| = m$ merupakan matching maksimum di \mathcal{G} dan p merupakan M -augmenting path dengan $|D(p)| = n$. Berdasarkan pembahasan sebelumnya, maka $M_1 = M \setminus D(p)$ merupakan matching dengan kardinalitas $|M_1| = m - \frac{n-1}{2}$. Begitupun juga dengan $M_2 = D(p) \setminus M$ juga merupakan matching dengan kardinalitas $|M_2| = \frac{n+1}{2}$ dimana $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Dengan demikian dapat diperoleh matching $M' = M_1 \cup M_2$ dengan kardinalitas $|M'| = (m - \frac{n-1}{2}) + \frac{n+1}{2} = m + 1$. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan bahwa M merupakan matching maksimum. (\Leftarrow) Asumsikan tidak ada M -augmenting path, tetapi ada M' sedemikian hingga $|M'| > |M|$. \square

Kemudian berikut ini diberikan algoritma untuk mencari matching maksimum

M pada graf bipartisi G berdasarkan eksistensi dari M -*augmenting path* pada graf bipartisi G ,

Algoritma 1: (Ahuja dkk, 1993) *Matching* maksimum pada graf bipartisi
 $G = (N^+, N^-; D)$

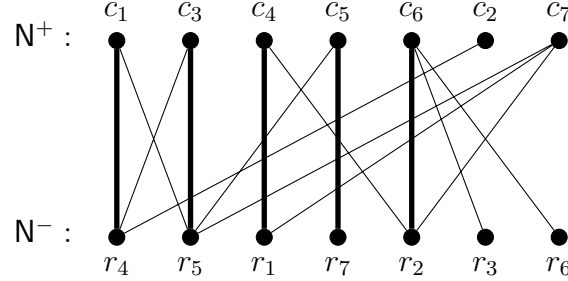
1. [Inisialisasi]
 $M := \emptyset; U := \emptyset;$
2. [Cheap *matching*]
for each titik $c \in N^+$ **do**
pasangkan c dengan titik *unmatch* yang pertama yaitu $r \notin \partial^- M$
dengan $(c, r) \in D$; jika tidak ada titik *unmatch* r yang memenuhi
 $(c, r) \in D$ maka tambahkan c ke dalam himpunan U ;
end for
3. [M -*augmenting path*]
 $U_{new} := \emptyset;$
repeat
[Melakukan satu kali mencari M -*augmenting path*]
for each titik $c \in U$ **do**
jika ditemukan M -*augmenting path* p dengan titik awal c maka $M =$
 $M \setminus D(p) \cup D(p) \setminus M$, namun jika tidak ditemukan maka
tambah c ke dalam himpunan U_{new} ;
end for
 $U := U_{new}; U_{new} := \emptyset;$
until tidak ada M -*augmenting path* di $G(A)$. □

Perhatikan kembali langkah kedua pada algoritma di atas, waktu komputasi yang dibutuhkan secara keseluruhan pada langkah kedua yaitu $O(|N^+|)$. Pada langkah ketiga, waktu komputasi yang dibutuhkan secara keseluruhan adalah $O(|N^+||D|)$. Sehingga secara keseluruhan waktu komputasi yang diperlukan untuk algoritma di atas adalah $O(|N^+||D|)$.

Contoh 2.2.7. Perhatikan kembali graf bipartisi $G(A)$ pada Gambar 2.3. Berdasarkan Algoritma 1 dapat diperoleh *matching* maksimum M pada graf bipartisi $G(A)$ dengan langkah-langkah sebagai berikut,

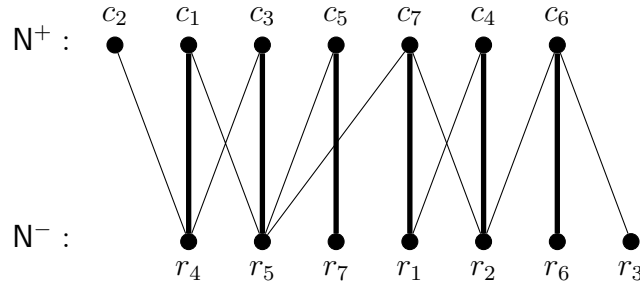
1. $M = \emptyset; U = \emptyset;$

2. $M = \{(c_1, r_4), (c_3, r_5), (c_4, r_1), (c_5, r_7), (c_6, r_2)\}$ dengan kardinalitas $|M| = 5$ yang direpresenasikan oleh garis tebal sebagaimana berikut,



$$U = \{c_2, c_7\};$$

3. Untuk $c = c_2 \in U$ tidak terdapat M -augmenting path pada graf bipartisi $G(A)$, sedangkan untuk $c = c_7 \in U$ diperoleh M -augmenting path yaitu $p = (c_7, r_1) (r_1, c_4) (c_4, r_2) (r_2, c_6) (c_6, r_6)$ sehingga diperoleh himpunan matching yang baru yaitu $M = \{(c_1, r_4), (c_3, r_5), (c_5, r_7)\} \cup \{(c_7, r_1), (c_4, r_2), (c_6, r_6)\}$ dengan kardinalitas yaitu $|M| = 6$, yang direpresenasikan sebagai berikut,



Gambar 2.4: Matching maksimum M pada $G(A)$

Karena tidak terdapat lagi M -augmenting path pada graf bipartisi $G(A)$ maka M merupakan matching maksimum pada graf bipartisi $G(A)$.

Adapun hubungan dualitas dari *matching* maksimum dan *cover* minimum di G diberikan dalam teorema berikut ini,

Teorema 2.2.8 (Murota, 2000). Diberikan sebarang graf bipartisi $G = (N^+, N^-; D)$. Untuk setiap matching $M \subseteq D$, dan cover (U^+, U^-) di G memenuhi

$$\max\{|M|\} = \min\{|U^+| + |U^-|\} \quad (2.1)$$

Untuk menulis ulang Teorema 2.2.8 kedalam bentuk yang lain maka didefinisikan pemetaan $\Gamma : 2^{\mathbf{N}^+} \longrightarrow 2^{\mathbf{N}^-}$ dan $\gamma : 2^{\mathbf{N}^+} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dengan

$$\Gamma(X) = \{v \in \mathbf{N}^- \mid \exists u \in X : (u, v) \in \mathbf{D}\}, \forall X \subseteq \mathbf{N}^+ \quad (2.2)$$

$$\gamma(X) = |\Gamma(X)|, \forall X \subseteq \mathbf{N}^+ \quad (2.3)$$

dimana $\Gamma(X)$ dinotasikan sebagai himpunan titik di \mathbf{N}^- yang terhubung dengan suatu titik di $X (\subseteq \mathbf{N}^+)$. Berikut ini diberikan sifat-sifat sederhana dari pemetaan Γ dan γ

Lema 2.2.9 (Murota, 2000). *Diberikan graf bipartisi $G = (\mathbf{N}^+, \mathbf{N}^-, \mathbf{D})$. Untuk $X, Y \subseteq \mathbf{N}^+$ memenuhi*

$$\Gamma(X \cup Y) = \Gamma(X) \cup \Gamma(Y), \Gamma(X \cap Y) \subseteq \Gamma(X) \cap \Gamma(Y)$$

$$\gamma(X) + \gamma(Y) \geq \gamma(X \cup Y) + \gamma(X \cap Y).$$

Bukti. Berikut dibuktikan $\Gamma(X \cup Y) = \Gamma(X) \cup \Gamma(Y)$:

$$\begin{aligned} \Gamma(X \cup Y) &= \{v \in \mathbf{N}^- \mid \exists u \in X \cup Y : (u, v) \in \mathbf{D}\} \\ &= \{v \in \mathbf{N}^- \mid \exists u \in X : (u, v) \in \mathbf{D}\} \cup \{v \in \mathbf{N}^- \mid \exists u \in Y : (u, v) \in \mathbf{D}\} \\ &= \Gamma(X) \cup \Gamma(Y), \quad X, Y \subseteq \mathbf{N}^+. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Berikut dibuktikan $\Gamma(X \cap Y) \subseteq \Gamma(X) \cap \Gamma(Y)$:

$$\begin{aligned} \Gamma(X \cap Y) &= \{v \in \mathbf{N}^- \mid \exists u \in X \cap Y : (u, v) \in \mathbf{D}\} \\ &\subseteq \{v \in \mathbf{N}^- \mid \exists u \in X : (u, v) \in \mathbf{D}\} \cap \{v \in \mathbf{N}^- \mid \exists u \in Y : (u, v) \in \mathbf{D}\} \\ &= \Gamma(X) \cap \Gamma(Y), \quad X, Y \subseteq \mathbf{N}^+. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Berikut dibuktikan $\gamma(X) + \gamma(Y) \geq \gamma(X \cup Y) + \gamma(X \cap Y)$:

Perhatikan kembali Persamaan 2.4 dan Persamaan 2.5 sedemikian hingga berdasarkan Persamaan 2.3 dapat diperoleh $\gamma(X \cup Y) = \gamma(\Gamma(X) \cup \Gamma(Y))$ dan $\gamma(X \cap Y) \leq \gamma(\Gamma(X) \cap \Gamma(Y))$. Dengan demikian diperoleh,

$$\begin{aligned} \gamma(X \cup Y) + \gamma(X \cap Y) &\leq \gamma(\Gamma(X) \cup \Gamma(Y)) + \gamma(\Gamma(X) \cap \Gamma(Y)) \\ &= \gamma(X) + \gamma(Y), \quad X, Y \subseteq \mathbf{N}^+. \end{aligned}$$

□

Bentuk kedua dari dualitas *matching* maksimum dan *cover* minimum diberikan dalam bentuk γ sebagai berikut,

Teorema 2.2.10 (Murota, 2000). *Diberikan graf bipartisi G . Untuk matching $M \subseteq D$, memenuhi*

$$\max\{|M|\} = \min\{\gamma(X) - |X| \mid X \subseteq N^+\} + |N^+|. \quad (2.6)$$

Fungsi $p_0(X)$ yang diberikan sebagai berikut

$$p_0(X) = \gamma(X) - |X|, \quad X \subseteq N^+ \quad (2.7)$$

sebagaimana pada Teorema 2.2.10 disebut sebagai fungsi *surplus*.

Contoh 2.2.11. *Perhatikan kembali matching maksimum graf bipartisi $G(A)$ dalam Contoh 2.2.5. Berdasarkan Teorema 2.2.6 dan Teorema 2.2.8,*

$$(U^+, U^-) = (\{c_5, c_7, c_4, c_6\}, \{r_4, r_5\})$$

merupakan cover minimum yang kardinalitasnya sama dengan kardinalitas matching maksimumnya yaitu $|U^+| + |U^-| = 6$. Berdasarkan Teorema 2.2.10, diperoleh nilai minimum dari fungsi surplus yaitu $p_0(X) = -1$ untuk $X = \{c_1, c_2, c_4\}$ (sebagai salah satu contohnya) sedemikian hingga diperoleh hasil yang sama dengan kardinalitas matching maksimumnya, yaitu $\max\{|M| \mid M : \text{matching}\} = -1 + 7 = 6$.

Perhatikan kembali Persamaan 2.7, sekumpulan himpunan $X \subseteq N^+$ dengan $p_0(X)$ minimum dinotasikan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\min}(p_0) &= \{X \subseteq N^+ \mid p_0(X) \leq p_0(Y), \forall Y \subseteq N^+\} \\ &= \{X_k \mid k = 0, 1, \dots, b\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Kemudian untuk $X_k \in \mathcal{L}_{\min}(p_0)$, $k = 0, 1, 2, \dots, b$ dapat dibuat rantai menaik maksimal yaitu

$$X_0 (= \min \mathcal{L}_{\min}(p_0)) \subsetneq X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \dots \subsetneq X_b (= \max \mathcal{L}_{\min}(p_0)),$$

sedemikian hingga diperoleh partisi dari N^+ yaitu

$$\begin{aligned} N_0^+ &= X_0 \\ N_k^+ &= X_k \setminus X_{k-1} \quad (k = 1, \dots, b) \\ N_\infty^+ &= N^+ \setminus X_b. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Kemudian didefinisikan urutan parsial \preceq pada $\{\mathbf{N}_k^+ \mid k = 1, 2, \dots, b\}$ sebagai berikut

$$\mathbf{N}_k^+ \preceq \mathbf{N}_l^+ \Leftrightarrow [\mathbf{N}_l^+ \subseteq X \in \mathcal{L}_{\min}(p_0) \Rightarrow \mathbf{N}_k^+ \subseteq X]. \quad (2.10)$$

Sedangkan untuk \mathbf{N}_0^+ dan \mathbf{N}_∞^+ didefinisikan urutan parsial \preceq yaitu $\mathbf{N}_0^+ \preceq \mathbf{N}_k^+ \preceq \mathbf{N}_\infty^+$ untuk setiap $k = 1, 2, \dots, b$. Dalam hal ini $\mathbf{N}_k^+ \neq \emptyset$ untuk $k = 1, \dots, b$, sedangkan \mathbf{N}_0^+ dan \mathbf{N}_∞^+ merupakan dua subhimpunan yang bisa jadi merupakan himpunan kosong. Dengan demikian dapat diperoleh partisi dari \mathbf{N}^+ bersama urutan parsial \preceq yaitu $\{\mathbf{N}_0^+; \mathbf{N}_1^+, \dots, \mathbf{N}_b^+; \mathbf{N}_\infty^+\}$.

Selanjutnya partisi dari \mathbf{N}^- dapat diperoleh yaitu.

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_0^- &= \Gamma(X_0) \\ \mathbf{N}_k^- &= \Gamma(X_k) \setminus \Gamma(X_{k-1}) \quad (k = 1, \dots, b) \\ \mathbf{N}_\infty^- &= \mathbf{N}^- \setminus \Gamma(X_b). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Kemudian didefinisikan urutan parsial \preceq pada $\{\mathbf{N}_k^- \mid k = 1, 2, \dots, b\}$ sebagaimana dalam Persamaan 2.10, yaitu

$$\mathbf{N}_k^- \preceq \mathbf{N}_l^- \Leftrightarrow [\mathbf{N}_l^- \subseteq \Gamma(X), X \in \mathcal{L}_{\min}(p_0) \Rightarrow \mathbf{N}_k^- \subseteq \Gamma(X)].$$

Sedangkan untuk \mathbf{N}_0^- dan \mathbf{N}_∞^- didefinisikan urutan parsial \preceq yaitu $\mathbf{N}_0^- \preceq \mathbf{N}_k^- \preceq \mathbf{N}_\infty^-$ untuk setiap $k = 1, 2, \dots, b$. Dalam hal ini $\mathbf{N}_k^- \neq \emptyset$ untuk $k = 1, \dots, b$, sedangkan \mathbf{N}_0^- dan \mathbf{N}_∞^- merupakan dua subhimpunan yang bisa jadi merupakan himpunan kosong. Dengan demikian dapat diperoleh partisi dari \mathbf{N}^- bersama urutan parsial \preceq yaitu $\{\mathbf{N}_0^-; \mathbf{N}_1^-, \dots, \mathbf{N}_b^-; \mathbf{N}_\infty^-\}$.

Contoh 2.2.12. Perhatikan kembali graf bipartisi pada Gambar 2.4. Pada graf bipartisi tersebut dapat diperoleh himpunan $\mathcal{L}_{\min}(p_0)$ yaitu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\min}(p_0) &= \{\{c_2, c_1, c_3\}, \{c_2, c_1, c_3, c_5\}, \{c_2, c_1, c_3, c_7, c_4\}, \\ &\quad \{c_2, c_1, c_3, c_5, c_7, c_4\}\}. \end{aligned}$$

Kemudian dari $\mathcal{L}_{\min}(p_0)$ dapat disusun menjadi rantai menaik maksimal yaitu

$$\{c_2, c_1, c_3\} \subset \{c_2, c_1, c_3, c_5\} \neq \{c_2, c_1, c_3, c_7, c_4\} \neq \{c_2, c_1, c_3, c_5, c_7, c_4\}$$

yang artinya telah diperoleh $X_0 = \{c_2, c_1, c_3\}$, $X_1 = \{c_2, c_1, c_3, c_5\}$, $X_2 = \{c_2, c_1, c_3, c_7, c_4\}$ dan $X_3 = \{c_2, c_1, c_3, c_5, c_7, c_4\}$. Berdasarkan dengan

Persamaan 2.9, maka dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
N_0^+ &= \{c_2, c_1, c_3\} \\
N_1^+ &= \{c_2, c_1, c_3, c_5\} \setminus \{c_2, c_1, c_3\} = \{c_5\} \\
N_2^+ &= \{c_2, c_1, c_3, c_7, c_4\} \setminus \{c_2, c_1, c_3, c_5\} = \{c_7, c_4\} \\
N_3^+ &= \{c_2, c_1, c_3, c_5, c_7, c_4\} \setminus \{c_2, c_1, c_3, c_7, c_4\} = \{c_5\} \\
N_\infty^+ &= \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7\} \setminus \{c_2, c_1, c_3, c_5, c_7, c_4\} = \{c_6\}.
\end{aligned}$$

Karena $N_1^+ = N_3^+$ maka dapat dipilih salah satu saja yaitu N_1^+ , dengan demikian dapat diperoleh partisi dari N^+ bersama urutan parsial \preceq yaitu $N_0^+ = \{c_2, c_1, c_3\}$, $N_1^+ = \{c_5\}$, $N_2^+ = \{c_7, c_4\}$, $N_\infty^+ = \{c_6\}$. Selanjutnya berdasarkan Persamaan 2.11 partisi dari N^- dapat diperoleh yaitu

$$\begin{aligned}
N_0^- &= \{r_4, r_5\} \\
N_1^- &= \{r_4, r_5, r_7\} \setminus \{r_4, r_5\} = \{r_7\} \\
N_2^- &= \{r_4, r_5, r_1, r_2\} \setminus \{r_4, r_5, r_7\} = \{r_1, r_2\} \\
N_3^- &= \{r_4, r_5, r_7, r_1, r_2\} \setminus \{r_4, r_5, r_1, r_2\} = \{r_7\} \\
N_\infty^- &= \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7\} \setminus \{r_4, r_5, r_7, r_1, r_2\} = \{r_6, r_3\}.
\end{aligned}$$

Karena $N_1^- = N_3^-$ maka dapat dipilih salah satu saja dengan indeks yang sesuai dengan pilihan $N_1^+ = N_3^+$ sebelumnya yaitu N_1^- , dengan demikian dapat diperoleh partisi dari N^- bersama urutan parsial \preceq yaitu $N_0^- = \{r_4, r_5\}$, $N_1^- = \{r_7\}$, $N_2^- = \{r_1, r_2\}$, $N_\infty^- = \{r_6, r_3\}$.

Himpunan garis D pada graf bipartisi G dipartisi berdasarkan

$$D = \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} D_k \right) \cup \left(\bigcup_{k \neq l} D_{k,l} \right),$$

dimana

$$\begin{aligned}
D_k &= \{a \in D \mid \partial^+ a \in N_k^+, \partial^- a \in N_k^-\} \quad (k = 0, 1, \dots, b, \infty), \\
D_{k,l} &= \{a \in D \mid \partial^+ a \in N_l^+, \partial^- a \in N_k^-\} \quad (k \neq l; k, l = 0, 1, \dots, b, \infty).
\end{aligned}$$

Dengan demikian, berdasarkan penjelasan-penjelasan sebelumnya dapat diperoleh subgraf-subgraf $\{G_k = (N_k^+, N_k^-; D_k) \mid k = 0, 1, \dots, b, \infty\}$. Kemudian didefinisikan urutan parsial \preceq pada $\{G_k \mid k = 0, 1, \dots, b, \infty\}$ yaitu $G_k \preceq G_l$ jika dan hanya jika $N_k^+ \preceq N_l^+$. Dekomposisi yang dilakukan dengan

mempartisi graf bipartisi $G = (N^+, N^-; D)$ menjadi subgraf-subgraf $\{G_k = (N_k^+, N_k^-; D_k) \mid k = 0, 1, \dots, b, \infty\}$ disebut sebagai **dekomposisi Dulmage-Mendelsohn** dengan setiap G_k , $k = 0, 1, \dots, b, \infty$ disebut sebagai komponen dekomposisi Dulmage-Mendelsohn. Untuk G_0 disebut sebagai *horizontal tail*, G_∞ disebut sebagai *vertical tail*, dan G_k ($k = 1, \dots, b$) disebut sebagai *consistent component*.

Contoh 2.2.13. Perhatikan kembali Contoh 2.2.12, berdasarkan partisi N^+ dan N^- pada contoh tersebut maka diperoleh partisi dari himpunan garis D di graf bipartisi $G(A) = (N^+, N^-; D)$ yaitu

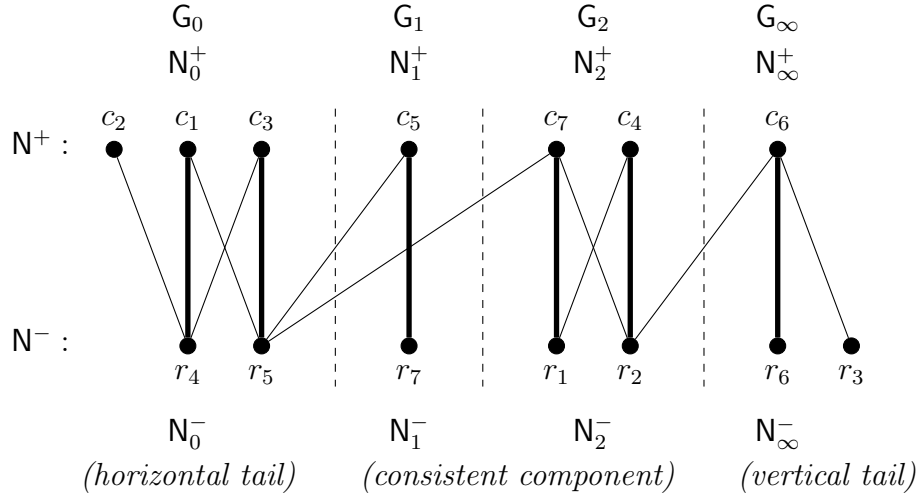
$$D_0 = \{(c_2, r_4), (c_1, r_4), (c_1, r_5), (c_3, r_4), (c_3, r_5)\}$$

$$D_1 = \{(c_5, r_7)\}$$

$$D_2 = \{(c_7, r_1), (c_7, r_2), (c_4, r_1), (c_4, r_2)\}$$

$$D_\infty = \{(c_6, r_6), (c_6, r_3)\}.$$

Dengan demikian dapat diperoleh hasil dekomposisi Dulmage-Mendelsohn pada graf $G(A)$ berupa subgraf-subgraf $\{G_k(A) = (N_k^+, N_k^-; D_k) \mid k = 0, 1, 2, \infty\}$, dimana untuk setiap subgraf G_k ($k = 0, 1, 2, \infty$) ditunjukkan oleh garis vertikal putus-putus pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5: Dekomposisi Dulmage-Mendelsohn pada graf $G(A)$

Dekomposisi Dulmage-Mendelsohn memperlihatkan struktur dari graf bipartisi yang memperhatikan *matching* maksimum dan *cover* minimum sebagaimana dijelaskan dalam teorema berikut.

Teorema 2.2.14 (Murota, 2000). *Diberikan graf bipartisi $G = (N^+, N^-; D)$. Misalkan $G_k = (N_k^+, N_k^-; D_k)$ ($k = 0, 1, \dots, b, \infty$) sebagai komponen-komponen dekomposisi Dulmage-Mendelsohn pada graf bipartisi G .*

1. Untuk $k = 0$ (horizontal tail) : $N_0^- \neq \emptyset \Rightarrow |N_0^-| < |N_0^+|$, $v(G_0) = |N_0^-|$, $\mathcal{C}(G_0) = \{(\emptyset, N_0^-)\}$, dan setiap $a \in D_0$ merupakan admissible di G_0 ;
 Untuk $1 \leq k \leq b$ (consistent components) : $v(G_k) = |N_k^+| = |N_k^-|$, $\mathcal{C}(G_k) = \{(N_k^+, \emptyset), (\emptyset, N_k^-)\}$, dan setiap $a \in D_k$ merupakan admissible di G_k ;
 Untuk $k = \infty$ (vertical tail) : $N_\infty^+ \neq \emptyset \Rightarrow |N_\infty^+| < |N_\infty^-|$, $v(G_\infty) = |N_\infty^+|$, $\mathcal{C}(G_\infty) = \{(N_\infty^+, \emptyset)\}$, dan setiap $a \in D_\infty$ merupakan admissible di G_∞ .
- 2 Urutan parsial \preceq pada komponen-komponen G_k merepresentasikan eksistensi dari $D_{k,l}$ yaitu

$$\text{jika } G_k \preceq G_l \text{ maka } D_{kl} = \emptyset \quad (1 \leq k, l \leq b); \quad (2.12)$$

$$\text{jika } G_k \prec G_l \text{ maka } D_{kl} \neq \emptyset \quad (1 \leq k, l \leq b). \quad (2.13)$$

- 3 Himpunan cover minimum di G diberikan sebagai berikut:

$$\mathcal{C}(G) = \left\{ \left(\bigcup_{k \in \bar{I}} N_k^+, \bigcup_{k \in I} N_k^- \right) \mid I = \mathcal{P}(\underline{b}) \cup \{0\}, \bar{I} = \{0, 1, \dots, b, \infty\} \setminus I \right\}.$$

dengan \mathcal{P} merupakan notasi dari power set.

- 4 $M(\subseteq D)$ merupakan matching maksimum di G jika dan hanya jika $M \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} D_k$ dan $M \cap D_k$ merupakan matching maksimum di G_k untuk $k = 0, 1, \dots, b, \infty$.

Bukti. Berikut dibuktikan pernyataan 1, 2, 3 dan 4. Perhatikan kembali Persamaan 2.11 yang mengakibatkan

$$D_{k,l} = \emptyset, (k > l). \quad (2.14)$$

1. Berikut ini dibuktikan dua pernyataan $N_0^- \neq \emptyset \Rightarrow |N_0^-| < |N_0^+|$ dan $N_\infty^+ \neq \emptyset \Rightarrow |N_\infty^+| < |N_\infty^-|$: Karena $N_0^+ \in \mathcal{L}_{\min}(p_0)$, maka dapat diperoleh

$$0 = p_0(\emptyset) \geq \min\{p_0\} = p_0(N_0^+) = \gamma(N_0^+) - |N_0^+| = |N_0^-| - |N_0^+|.$$

Jika diberlakukan kesamaan $p_0(\emptyset) = \min\{p_0\}$, maka mengakibatkan

$\mathbf{N}_0^+ = \emptyset$ dan secara otomatis $\mathbf{N}_0^- = \emptyset$. Untuk $k = 1, \dots, b$, diperoleh $\min\{p_0\} = \gamma(X_{k-1}) - |X_{k-1}| = \gamma(X_k) - |X_k|$, yang artinya $|\mathbf{N}_k^+| = |\mathbf{N}_k^-|$ berdasarkan Persamaan 2.11. Jika $\mathbf{N}_\infty^+ \neq \emptyset$, maka $p_0(\mathbf{N}^+) > \min\{p_0\} = p_0(X_b)$, yaitu $\gamma(\mathbf{N}^+) - |\mathbf{N}^+| > \gamma(X_b) - |X_b|$. Kombinasikan dengan $|\mathbf{N}^-| \geq \gamma(\mathbf{N}^+)$, $|\mathbf{N}_\infty^-| = |\mathbf{N}^-| - \gamma(X_b)$, $|\mathbf{N}_\infty^+| = |\mathbf{N}^+| - |X_b|$ menghasilkan $|\mathbf{N}_\infty^-| > |\mathbf{N}_\infty^+|$.

Berikut ini dibuktikan $v(\mathbf{G}_0) = |\mathbf{N}_0^-|$, $v(\mathbf{G}_k) = |\mathbf{N}_k^+| = |\mathbf{N}_k^-|$ dan $v(\mathbf{G}_\infty) = |\mathbf{N}_\infty^+|$: Untuk $k = 0, 1, \dots, b$ ambil $Y_k = \bigcup_{l=0}^k \mathbf{N}_l^-$ dan diberikan graf $\mathbf{G}^{(k)}$ sebagai subgraf \mathbf{G} yang diinduksi dari $X_k \cup Y_k$. Hal ini berdasarkan Persamaan 2.14 dan Teorema 2.2.10 bahwa

$$v(\mathbf{G}^{(k)}) = \min\{p_0(X) \mid X \subseteq X_k\} + |X_k| = |Y_k|,$$

yang mengakibatkan $v(\mathbf{G}_k) = |\mathbf{N}_k^-|$ untuk $k = 0, 1, \dots, b$. Karena $\mathbf{D}_{\infty,k} = \emptyset$ untuk $k = 0, 1, \dots, b$ berdasarkan Persamaan 2.14 dan $v(\mathbf{G}^{(b)}) = |Y_b|$, diperoleh

$$|\mathbf{N}_\infty^+| \geq v(\mathbf{G}_\infty) \geq v(\mathbf{G}) - |Y_b| = \min\{p_0\} + |\mathbf{N}^+| - |Y_b| = |\mathbf{N}^+| - |X_b| = |\mathbf{N}_\infty^+|.$$

Berikut ini dibuktikan $\mathcal{C}(\mathbf{G}_0) = \{(\emptyset, \mathbf{N}_0^-)\}$, $\mathcal{C}(\mathbf{G}_k) = \{(\mathbf{N}_k^+, \emptyset), (\emptyset, \mathbf{N}_k^-)\}$ dan $\mathcal{C}(\mathbf{G}_\infty) = \{(\mathbf{N}_\infty^+, \emptyset)\}$: Untuk $k = 0, 1, \dots, b, \infty$ fungsi *surplus* $p^{(k)} : 2^{\mathbf{N}_k^+} \rightarrow \mathbb{Z}$ pada \mathbf{G}_k diberikan sebagai berikut

$$p^{(k)}(X) = |\Gamma(X) \cap \mathbf{N}_k^-| - |X| = p_0(X_{k-1} \cup X) - p_0(X_{k-1}), X \subseteq \mathbf{N}_k^+,$$

dimana $X_{k-1} = \emptyset$ untuk $k = 0$ dan $X_{k-1} = X_b$ untuk $k = \infty$. Hal ini menunjukkan

$$\mathcal{L}_{\min}(p^{(k)}) = \begin{cases} \{\mathbf{N}_0^+\} & (k = 0) \\ \{\emptyset, \mathbf{N}_k^+\} & (1 \leq k \leq b) \\ \{\emptyset\} & (k = \infty). \end{cases} \quad (2.15)$$

Berikut ini dibuktikan setiap $a \in \mathbf{D}_k$ merupakan *admissible* di \mathbf{G}_k : Untuk $a = (u, v) \in \mathbf{D}_k$ dipertimbangkan *cover* (W^+, W^-) pada $\mathbf{G}_k \setminus \{u, v\}$. Karena $(W^+ \cup \{u\}, W^- \cup \{v\})$ merupakan *cover* pada \mathbf{G}_k tetapi bukan *cover* minimum berdasarkan Persamaan 2.15, diperoleh

$|W^+| + |W^-| + 2 \geq v(\mathbf{G}_k + 1)$. Oleh sebab itu, $v(\mathbf{G}_k \setminus \{u, v\}) = \min\{|W^+| + |W^-|\} \geq v(\mathbf{G}_k) - 1$. Suatu *matching* maksimum pada $\mathbf{G}_k \setminus \{u, v\}$ secara bergantian dengan $\{u, v\}$ membentuk *matching* maksimum pada \mathbf{G}_k .

3. Pernyataan ini sesuai dengan pengertian dari *cover*, yaitu (U^+, U^-) merupakan *cover* jika dan hanya jika $\Gamma(\mathbf{N}^+ \setminus U^+) \subseteq U^-$, dan $X \in \mathcal{L}_{\min}(p_0)$ jika dan hanya jika X berhubungan dengan *order ideal*.
2. Untuk membuktikan Persamaan 2.12 andaikan bahwa $\mathbf{G}_k \not\preceq \mathbf{G}_l$. Maka terdapat sebuah *order ideal* I sedemikian hingga $k \notin I$ dan $l \in I$. Berdasarkan poin 3., $(\bigcup_{j \in I} \mathbf{N}_j^+, \bigcup_{j \in I} \mathbf{N}_j^-)$ merupakan *cover* minimum. Yang artinya secara khusus bahwa tidak terdapat garis diantara \mathbf{N}_l^+ dan \mathbf{N}_k^- , yaitu $\mathbf{D}_{k,l} = \emptyset$.

Untuk membuktikan Persamaan 2.13 andaikan bahwa $\mathbf{G}_k \preceq \mathbf{G}_l$, dimana $k < l$. Ambil

$$\begin{aligned} I &= \{i \mid k < i < l, \mathbf{G}_k \preceq \mathbf{G}_i\}, & I^* &= I \cup \{k\} \\ J &= \{j \mid k < j < l\} \setminus I, & J^* &= J \cup \{l\}. \end{aligned}$$

diperoleh (i) $i \in I^*, j \in J \implies \mathbf{G}_i \not\preceq \mathbf{G}_j$, (ii) $i \in I \implies \mathbf{G}_i \not\preceq \mathbf{G}_l$. Pernyataan (i) diperoleh dari sifat transitif urutan parsial dan statement kedua diperoleh dengan mengansumsika $\mathbf{G}_k \prec \mathbf{G}_l$. Dengan demikian diperoleh

$$i \in I^*, j \in J^*, (i, j) \neq (k, l) \implies \mathbf{G}_i \not\preceq \mathbf{G}_j \implies \mathbf{D}_{i,j} = \emptyset,$$

dimana Persamaan 2.12 digunakan. Jika untuk kasus $\mathbf{D}_{k,l} = \emptyset$, diperoleh $\mathbf{D}_{i,j} = \emptyset$ untuk $i \in I^*$ dan $j \in J^*$. Akibatnya $X = X_{k-1} \cup \left(\bigcup_{j \in J^*} \mathbf{N}_j^+\right)$ menjadi $\mathcal{L}_{\min}(p_0)$, oleh karena $p_0(X) = (|Y_{k-1}| + \sum_{j \in J^*} |\mathbf{N}_j^-|) - (|X_{k-1}| + \sum_{j \in J^*} |\mathbf{N}_j^+|) = |Y_{k-1}| - |X_{k-1}| = \min\{p_0\}$. Oleh karena $X \in \mathcal{L}_{\min}(p_0)$, $\mathbf{N}_k^+ \not\subseteq X$ dan $\mathbf{N}_l^+ \subseteq X$. Hal ini kontradiksi terhadap definisi dari $\mathbf{N}_k^+ \preceq \mathbf{N}_l^+$. Karena itu, $\mathbf{D}_{k,l} \neq \emptyset$.

4. Diberikan (U^+, U^-) sebagai *cover* minimum. Berdasarkan Teorema 2.2.8, \mathbf{M} merupakan *matching* maksimum jika dan hanya jika tidak terdapat $a \in \mathbf{M}$ sedemikian hingga $\partial^+ a \in U^+$ dan $\partial^- a \in U^-$. Kemudian pernyataan tersebut sesuai dengan pernyataan dari (1) - (3) di atas.

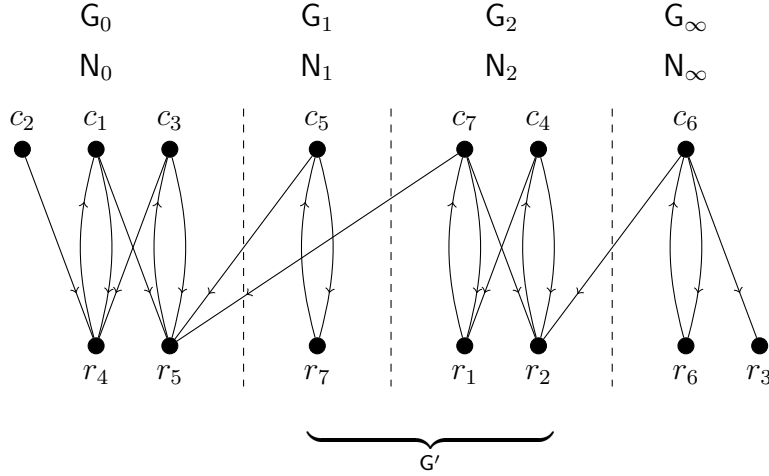
□

Algoritma untuk dekomposisi Dulmage-Mendelsohn diberikan sebagai berikut. Untuk *matching* M didefinisikan graf bantu $\tilde{G}_M = (N^+ \cup N^-, \tilde{D}; S^+, S^-)$ dimana $\tilde{D} = \{(u, v) \mid (u, v) \in D \text{ atau } (v, u) \in M\}$, $S^+ = N^+ \setminus \partial^+ M$, $S^- = N^- \setminus \partial^- M$. Perhatikan kembali notasi $\xrightarrow{*}$ sebagai definisi keterhubungan (*reachable*) antara dua titik pada graf.

Algoritma 2: (Murota, 2000) Dekomposisi Dulmage-Mendelsohn pada graf bipartisi $G = (N^+, N^-; D)$

1. Tentukan *matching* maksimum M pada graf bipartisi $G = (N^+, N^-; D)$;
2. Tentukan $N_0 = \{v \in N^+ \cup N^- \mid u \xrightarrow{*} v \text{ pada } \tilde{G}_M \text{ untuk beberapa } u \in S^+\}$;
3. Tentukan $N_\infty = \{v \in N^+ \cup N^- \mid v \xrightarrow{*} u \text{ pada } \tilde{G}_M \text{ untuk beberapa } u \in S^-\}$;
4. Konstruksi graf G' yaitu graf yang diperoleh dengan menghapus himpunan titik N_0 dan N_∞ beserta garis penghubungnya pada graf \tilde{G}_M ;
5. Tentukan N_k ($k = 1, 2, \dots, b$) yaitu komponen-komponen *strongly connected* pada graf G' ;
6. Tentukan $G_k = (N_k^+, N_k^-; D_k)$ sebagai subgraf partisi dari graf bipartisi G berdasarkan N_k ($k = 1, 2, \dots, b$);
7. Susun ulang urutan dari $\{G_k \mid k = 1, 2, \dots, b\}$ berdasarkan urutan parsial \preceq dimana $G_k \preceq G_l \Leftrightarrow v_l \xrightarrow{*} v_k$ di \tilde{G}_M untuk beberapa $v_k \in N_k$ dan $v_l \in N_l$. Kemudian untuk G_0 dan G_∞ didefinisikan $G_0 \preceq G_k \preceq G_\infty$.

Contoh 2.2.15. Perhatikan kembali graf bipartisi $G(A)$ pada Gambar 2.4. Dekomposisi Dulmage-Mendelsohn pada graf $G(A)$ dapat dilakukan dengan mengikuti langkah-langkah pada Algoritma 2. Langkah pertama: berdasarkan *matching* M pada Contoh 2.2.7 dapat diperoleh graf bantu $\tilde{G}_M(A)$ dengan $\tilde{D} = D \cup \{(r_4, c_1), (r_5, c_3), (r_7, c_5), (r_1, c_7), (r_2, c_4), (r_6, c_6)\}$ yang bentuk grafnya sebagai berikut,



Gambar 2.6: Graf bantu $\tilde{G}_M(A) = (N^+ \cup N^-, \tilde{D})$.

Garis vertikal putus-putus pada Gambar 2.6 menjelaskan langkah demi langkah pada Algoritma 2. Langkah kedua: diperoleh $N_0 = \{c_2, c_1, c_3, r_4, r_5\}$ dan langkah ketiga: diperoleh $N_\infty = \{c_6, r_6, r_3\}$. Langkah keempat: diperoleh graf G' sebagaimana pada Gambar 2.6. Langkah kelima: diperoleh komponen-komponen strongly connected pada G' yaitu $N_1 = \{c_5, r_7\}$ dan $N_2 = \{c_7, c_4, r_1, r_2\}$. Langkah keenam: jika dikembalikan pada graf bipartisi G , berdasarkan $\{N_k \mid k = 0, 1, 2, \infty\}$ maka dapat diperoleh subgraf-subgraf partisi $\{G_k = (N_k^+, N_k^-; D_k) \mid k = 0, 1, 2, \infty\}$ yang memenuhi urutan parsial \preceq dalam langkah ketujuh. Hasil dekomposisi Dulmage-Mendelsohn $\{G_k = (N_k^+, N_k^-; D_k) \mid k = 0, 1, 2, \infty\}$ yang diberikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
N_0^+ &= \{c_2, c_1, c_3\}, & N_0^- &= \{r_4, r_5\}, & D_0 &= \{(c_2, r_4), (c_1, r_4), (c_1, r_5), (c_3, r_4), \\
& & & & & (c_3, r_5)\}; \\
N_1^+ &= \{c_5\}, & N_1^- &= \{r_7\}, & D_1 &= \{(c_5, r_7)\}; \\
N_2^+ &= \{c_7, c_4\}, & N_2^- &= \{r_1, r_2\}, & D_2 &= \{(c_7, r_1), (c_7, r_2), (c_4, r_1), (c_4, r_2)\}; \\
N_\infty^+ &= \{c_6\}, & N_\infty^- &= \{r_6, r_3\}, & D_\infty &= \{(c_6, r_6), (c_6, r_3)\};
\end{aligned}$$

dengan bentuk grafnya sebagaimana dalam Gambar 2.5.

Hasil dari dekomposisi Dulmage-Mendelsohn yaitu berupa partisi-partisi dari N^+ dan N^- yaitu $\{N_0^+; N_1^+ \cdots, N_b^+; N_\infty^+\}$ dan $\{N_0^-; N_1^- \cdots, N_b^-; N_\infty^-\}$. Partisi dari N^+ dan N^- merupakan suatu bentuk dari hasil permutasi n elemen. Hasil partisi $\{N_0^+; N_1^+ \cdots, N_b^+; N_\infty^+\}$ merepresentasikan matriks permutasi kolom Q , sedangkan hasil partisi $\{N_0^-; N_1^- \cdots, N_b^-; N_\infty^-\}$ merepresentasikan matriks

permutasi baris P dimana dari matriks permutasi P dan Q ini dapat diperoleh hasil dekomposisi matriks A menjadi matriks blok segitiga atas $\bar{A} = PAQ$.

Contoh 2.2.16. Perhatikan kembali partisi N^+ dan N^- pada Contoh 2.2.12 ataupun pada Contoh 2.2.15 yaitu $\{N_0^+; N_1^+, N_2^+; N_\infty^+\} = \{c_2, c_1, c_3; c_5, c_7, c_4; c_6\}$ dan $\{N_0^-; N_1^-, N_2^-; N_\infty^-\} = \{r_4, r_5; r_7; r_1, r_2; r_6, r_3\}$, masing-masing merepresentasikan suatu bentuk permutasi 7 elemen yaitu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, sedemikian hingga dari masing-masing permutasi 7 elemen tersebut dapat dikonstruksi matriks permutasi kolom Q dan matriks permutasi baris P . Berdasarkan teori matriks permutasi yang telah dijelaskan sebelumnya maka pada matriks Q memiliki entri-entri $[Q]_{2,1} = [Q]_{1,2} = [Q]_{3,3} = [Q]_{5,4} = [Q]_{7,5} = [Q]_{4,6} = [Q]_{6,7} = 1$ dan 0 untuk yang lainnya, sedangkan pada matriks P memiliki entri-entri $[P]_{1,4} = [P]_{2,5} = [P]_{3,7} = [P]_{4,1} = [P]_{5,2} = [P]_{6,6} = [P]_{7,3} = 1$ matriks permutasi kolom Q dan P yaitu

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sedemikian hingga diperoleh hasil dekomposisi matriks A dalam bentuk matriks blok segitiga atas \bar{A} yaitu

$$\bar{A} = PAQ$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & 2 & 1 & 3 & 5 & 7 & 4 & 6 \\ 4 & a_{4,2} & a_{4,1} & a_{4,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & a_{5,1} & a_{5,3} & a_{5,5} & a_{5,7} & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & a_{7,5} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{1,7} & a_{1,4} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{2,7} & a_{2,4} & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{6,6} \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{3,6} \end{array} \end{array}$$

2.3 Aljabar Max-Plus

Dalam subbab ini dijelaskan mengenai Aljabar max-plus. Dalam Bagian 2.3.1 dijelaskan mengenai definisi dan konsep-konsep dasar terkait perhitungan-perhitungan dalam aljabar max-plus. Kemudian dalam Bagian 2.3.2 dibahas beberapa teori mengenai matriks dan vektor atas aljabar max-plus.

2.3.1 Definisi dan konsep-konsep dasar Aljabar Max-Plus

Didefinisikan $\varepsilon \stackrel{def}{=} -\infty$, $e \stackrel{def}{=} 0$, dan $\mathbb{R}_\varepsilon \stackrel{def}{=} \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan \mathbb{R} merupakan himpunan semua bilangan real. Kemudian untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon$, didefinisikan dua operasi biner \oplus dan \otimes yaitu

$$a \oplus b \stackrel{def}{=} \max\{a, b\} \text{ dan } a \otimes b \stackrel{def}{=} a + b$$

Jelas bahwa untuk setiap $a \in \mathbb{R}_\varepsilon$ memenuhi $\max\{a, -\infty\} = \max\{-\infty, a\} = a$ dan $a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty$, sehingga

$$a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a \text{ dan } a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon.$$

Selanjutnya berikut ini diberikan definisi aljabar max-plus,

Definisi 2.3.1 (Subiono, 2017). ***Aljabar max-plus** merupakan himpunan tak-kosong \mathbb{R}_ε beserta dua operasi biner \oplus dan \otimes yang dinotasikan sebagai $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$.*

Contoh 2.3.2 (Heidergott, 2006). *Beberapa definisi diatas dapat diilustrasikan oleh beberapa contoh berikut ini,*

- $5 \oplus 3 = \max\{5, 3\} = 5.$
- $5 \oplus \varepsilon = \max\{5, +(\infty)\} = 5.$
- $5 \otimes \varepsilon = 5 - \infty = -\infty = \varepsilon.$
- $e \oplus 3 = \max\{0, 3\} = 3.$
- $5 \otimes 3 = 5 + 3 = 8.$

Seperti halnya dalam aljabar biasa, prioritas urutan operasi \otimes lebih dulu atas operasi \oplus . Misalnya,

$$10 \otimes -7 \oplus 6 \otimes 2 = (10 \otimes -7) \oplus (6 \otimes 2) = 3 \oplus 8 = 8.$$

Pangkat dalam aljabar max-plus secara biasa diperkenalkan dengan menggunakan sifat asosiatif. Himpunan bilangan asli digabung dengan bilangan nol dinotasikan oleh \mathbb{N} dan didefinisikan untuk $x \in \mathbb{R}_\varepsilon$ dan untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \neq 0$

$$x^{\otimes n} \stackrel{def}{=} \underbrace{x \otimes x \otimes \cdots \otimes x}_n = n \times x$$

sedangkan untuk $n = 0$ didefinisikan $x^{\otimes n} \stackrel{def}{=} e (= 0)$. Suatu contoh, misalnya

$$9^{\otimes 2} = 2 \times 9 = 18.$$

Terinspirasi oleh pengertian pangkat ini, dengan cara serupa pangkat negatif dari bilangan real sebagai mana contoh berikut

$$8^{\otimes -2} = -2 \times 8 = -16 = 16^{\otimes -1}.$$

Hal yang sama, akar-akar max-plus diperkenalkan sebagai

$$x^{\otimes \alpha} = \alpha \times x, \text{ untuk } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Suatu contoh, misalnya

$$9^{\otimes \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \times 9 = 3$$

Kemudian notasi sigma “ \oplus ” pada aljabar maxplus didefinisikan sebagai berikut, untuk suatu barisan $\{a_k \in \mathbb{R}_\varepsilon \mid k \in \underline{n}\}$ dengan $\underline{n} \stackrel{def}{=} \{1, 2, \dots, n\}$ didefinisikan,

$$\begin{aligned} \bigoplus_{k=1}^n a_k &\stackrel{def}{=} a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_n \\ &= \max_{k \in \underline{n}} \{a_k\}. \end{aligned}$$

Dalam hal yang sebenarnya, notasi ini hanyalah untuk mempersingkat penulisan dari serangkaian operasi \oplus agar tidak terlalu panjang.

2.3.2 Matriks dan Vektor atas Aljabar Max-Plus

Didefinisikan notasi $\mathbb{R}_\varepsilon^{n \times m}$ sebagai himpunan matriks ukuran $n \times m$ yang entri-entrinya merupakan bilangan di \mathbb{R}_ε . Untuk $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \neq 0$,

didefinisikan $\underline{n} \stackrel{def}{=} \{1, 2, \dots, n\}$. Entri-entri dari matriks $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times m}$ pada baris ke- i kolom ke- j dinotasikan oleh $[A]_{i,j} = a_{i,j} \in \mathbb{R}_\varepsilon$ untuk $i \in \underline{n}$ dan $j \in \underline{m}$. Dalam hal ini matriks A ditulis sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}.$$

Kemudian untuk setiap $A, B \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}_\varepsilon^{p \times m}$, dan $\alpha \in \mathbb{R}_\varepsilon$ didefinisikan dua operasi biner \oplus dan \otimes yaitu

$$\begin{aligned} [A \oplus B]_{i,j} &\stackrel{def}{=} a_{i,j} \oplus b_{i,j} = \max\{a_{i,j}, b_{i,j}\}, \quad i \in \underline{n}, j \in \underline{p} \\ [\alpha \otimes A]_{i,j} &\stackrel{def}{=} \alpha \otimes a_{i,j} = \alpha + a_{i,j}, \quad i \in \underline{n}, j \in \underline{p} \\ [A \otimes C]_{i,j} &\stackrel{def}{=} \bigoplus_{k=1}^p \{a_{i,k} \otimes c_{k,j}\} = \max_{k \in \underline{p}} \{a_{i,k} + c_{k,j}\}, \quad i \in \underline{n}, j \in \underline{m}. \end{aligned}$$

Selanjutnya berikut ini diberikan definisi matriks atas aljabar max-plus,

Definisi 2.3.3 (Subiono, 2017). ***Matriks atas aljabar max-plus** merupakan himpunan tak-kosong $\mathbb{R}_\varepsilon^{n \times m}$ beserta dua operasi biner \oplus dan \otimes yang dinotasikan sebagai $\mathbb{R}_{\max}^{n \times m} = (\mathbb{R}_\varepsilon^{n \times m}, \oplus, \otimes)$.*

Contoh 2.3.4. *Beberapa definisi diatas dapat diilustrasikan oleh beberapa contoh berikut.*

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ e & -5 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ \varepsilon & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max\{2, 5\} & \max\{3, 1\} \\ \max\{e, \varepsilon\} & \max\{-5, 2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ e & 2 \end{bmatrix}. \\ \bullet \quad & 2 \otimes \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ \varepsilon & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 5 & 2 + 1 \\ 2 + \varepsilon & 2 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ \varepsilon & 4 \end{bmatrix}. \\ \bullet \quad & \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ e & -5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ \varepsilon & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max\{2 + 5, 3 + \varepsilon\} & \max\{2 + 1, 3 + 2\} \\ \max\{e + 5, -5 + \varepsilon\} & \max\{e + 1, -5 + 2\} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \max\{7, \varepsilon\} & \max\{3, 5\} \\ \max\{5, \varepsilon\} & \max\{1, -3\} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Perlu diperhatikan bahwa, himpunan matriks atas aljabar max-plus $\mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$ terhadap operasi \oplus berlaku sifat komutatif, sebab untuk setiap $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$

memenuhi $[A \oplus B]_{i,j} = \max\{a_{i,j}, b_{i,j}\} = \max\{b_{i,j}, a_{i,j}\} = [B \oplus A]_{i,j}$ untuk setiap $i \in \underline{n}, j \in \underline{m}$. Kemudian matriks identitas $\mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$ terhadap operasi \oplus dinotasikan sebagai $\boldsymbol{\varepsilon}$ dimana $[\boldsymbol{\varepsilon}]_{i,j} = \varepsilon$ untuk setiap $i \in \underline{n}, j \in \underline{m}$. Dalam hal ini untuk setiap $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$ dapat diperoleh $A \oplus \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} \oplus A = A$.

Sedangkan himpunan matriks atas aljabar max-plus $\mathbb{R}_{\varepsilon}^{n \times m}$ terhadap operasi \otimes tidak berlaku sifat komutatif. Hal tersebut dapat dilihat dari poses perhitungan berikut

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ \varepsilon & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ e & -5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \max\{5+2, 1+e\} & \max\{5+3, 1+(-5)\} \\ \max\{\varepsilon+2, 2+e\} & \max\{\varepsilon+3, 2+(-5)\} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \max\{7, 1\} & \max\{8, -4\} \\ \max\{\varepsilon, 2\} & \max\{\varepsilon, -3\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Tampak bahwa hasil perhitungan pada Persamaan 2.16 tidak sama dengan hasil perhitungan pada Persamaan 2.17 yang artinya himpunan matriks atas aljabar max-plus $\mathbb{R}_{\varepsilon}^{n \times m}$ terhadap operasi \otimes tidak komutatif. Kemudian matriks satuan terhadap operasi \otimes dinotasikan sebagai $\boldsymbol{E} \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ yang entri-entrinya sebagai berikut

$$[\boldsymbol{E}]_{i,j} = \begin{cases} 0 & , \forall i = j \\ \varepsilon & , \forall i \neq j \end{cases}.$$

Dalam hal ini untuk setiap $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ dapat diperoleh $A \otimes \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E} \otimes A = A$.

Berikut ini diberikan beberapa sifat elementer matriks atas aljabar max-plus terhadap operasi \oplus dan \otimes .

Teorema 2.3.5 (Subiono, 2017). *Beberapa sifat berikut berlaku untuk sebarang matriks A, B , dan C atas aljabar max-plus dengan ukuran yang bersesuaian.*

$$i \quad (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

$$ii \quad (A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

$$iii \quad A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$$

$$iv \quad (A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$$

$$v \quad A \oplus A = A.$$

Bukti. Akan dibuktikan ii) dan iii) sedangkan bukti yang lainnya mengikuti dari definisi operasi dan sifat-sifat operasi pada \mathbb{R}_{\max} . Untuk membuktikan

ii), ambil sebarang matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times p}$, $B \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times q}$, $C \in \mathbb{R}_{\max}^{q \times m}$. Entri matriks $(A \otimes B) \otimes C$ baris ke- i kolom ke- j adalah

$$\begin{aligned}
[(A \otimes B) \otimes C]_{i,j} &= \bigoplus_{k=1}^q \left(\bigoplus_{l=1}^p a_{i,l} \otimes b_{l,k} \right) \otimes c_{k,j} \\
&= \bigoplus_{k=1}^q \bigoplus_{l=1}^p \{a_{i,l} \otimes b_{l,k} \otimes c_{k,j}\} \\
&= \bigoplus_{l=1}^p a_{i,l} \otimes \left(\bigoplus_{k=1}^q b_{l,k} \otimes c_{k,j} \right) \\
&= [A \otimes (B \otimes C)]_{i,j}
\end{aligned}$$

untuk $i \in \underline{n}$ dan $j \in \underline{m}$. Bukti iii), ambil sebarang matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times p}$ dan $B, C \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times m}$. Elemen baris ke- i kolom ke- j matriks $A \otimes (B \oplus C)$ adalah

$$\begin{aligned}
[A \otimes (B \oplus C)]_{i,j} &= \bigoplus_{k=1}^p a_{i,k} \otimes (b_{k,j} \oplus c_{k,j}) \\
&= \bigoplus_{k=1}^p (a_{i,k} \otimes b_{k,j}) \oplus (a_{i,k} \otimes c_{k,j}) \\
&= \left(\bigoplus_{k=1}^p a_{i,k} \otimes b_{k,j} \right) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^p a_{i,k} \otimes c_{k,j} \right) \\
&= [A \otimes B]_{i,j} \oplus [A \otimes C]_{i,j}
\end{aligned}$$

untuk $i \in \underline{n}$ dan $j \in \underline{m}$. □

Dalam matriks atas aljabar max-plus dikenalkan istilah matriks reguler. Matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ dikatakan sebagai **matriks reguler** jika dan hanya jika setiap baris matriks A memuat setidaknya satu entri tidak sama dengan ε . Kereguleran adalah suatu kondisi teknik belaka, bila A tidak reguler, maka A memuat baris redundan dan setiap sistem yang mempunyai model $\mathbf{x}(k+1) = A \otimes \mathbf{x}(k)$ juga bisa dimodelkan oleh versi redundan dari matriks A yang mana semua baris redundan dan kolom terkait diabaikan.

Transpose dari suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$ dinotasikan oleh A^\top didefinisikan sebagai $[A^\top]_{i,j} \stackrel{def}{=} a_{j,i}$, untuk $i \in \underline{n}$ dan $j \in \underline{m}$. Sebagaimana sebelumnya, juga dalam penjumlahan dan perkalian matriks operasi \otimes mempunyai prioritas urutan atas operasi \oplus .

Untuk $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$, pangkat ke- k dari A dinotasikan oleh $A^{\otimes k}$ didefinisikan

sebagai

$$A^{\otimes k} \stackrel{def}{=} \underbrace{A \otimes A \otimes \cdots \otimes A}_k$$

untuk $k \in \mathbb{N}$ dengan $k \neq 0$ dan $A^{\otimes 0} \stackrel{def}{=} \mathbf{E}$. Entri baris ke- i kolom ke- j dari matriks $A^{\otimes k}$ dapat diperoleh sebagaimana langkah-langkah berikut,

$$\begin{aligned} [A^{\otimes 2}]_{i,j} &= \bigoplus_{r=1}^n a_{i,r} \otimes a_{r,j} \\ [A^{\otimes 3}]_{i,j} &= [A \otimes A^{\otimes 2}]_{i,j} \\ &= \bigoplus_{r_2=1}^n a_{i,r_2} \otimes \left(\bigoplus_{r_1=1}^n a_{r_2,r_1} \otimes a_{r_1,j} \right) \end{aligned}$$

begitu seterusnya, sehingga diperoleh persamaan secara umum yaitu

$$\begin{aligned} [A^{\otimes k}]_{i,j} &= \bigoplus_{r_{k-1}=1}^n a_{i,r_{k-1}} \otimes \cdots \otimes \left(\bigoplus_{r_1=1}^n a_{r_2,r_1} \otimes a_{r_1,j} \right) \\ &= \max_{r_{k-1} \in \underline{n}} \{a_{i,r_{k-1}} + \cdots + \max_{r_1 \in \underline{n}} \{a_{r_2,r_1} + a_{r_1,j}\}\} \\ &= \max_{r_1, r_2, \dots, r_{k-1} \in \underline{n}} \{a_{i,r_{k-1}} + \cdots + a_{r_2,r_1} + a_{r_1,j}\}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Selanjutnya untuk setiap $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ trace dari matriks A dinotasikan oleh $\text{trace}(A)$ didefinisikan sebagai $\text{trace}(A) = \bigoplus_{i=1}^n a_{i,i}$.

Contoh 2.3.6 (Subiono, 2017). *Diberikan matriks*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ 5 & \varepsilon & 6 \end{bmatrix}$$

maka matriks pangkat berikut

$$A^{\otimes 2} = A \otimes A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ 5 & \varepsilon & 6 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ 5 & \varepsilon & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 9 & 6 & 10 \\ 11 & 7 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A^{\otimes 3} = A^{\otimes 2} \otimes A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 9 & 6 & 10 \\ 11 & 7 & 12 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 4 \\ 5 & \varepsilon & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 8 & 12 \\ 15 & 11 & 16 \\ 17 & 13 & 18 \end{bmatrix}$$

dan $\text{trace}(A) = \bigoplus_{i=1}^3 a_{i,i} = \max\{1, 3, 6\} = 6$, $\text{trace}(A^{\otimes 2}) = \bigoplus_{i=1}^3 [A^{\otimes 2}]_{i,i} = \max\{2, 6, 12\} = 12$, $\text{trace}(A^{\otimes 3}) = \bigoplus_{i=1}^3 [A^{\otimes 3}]_{i,i} = \max\{11, 11, 18\} = 18$

Didefinisikan notasi \mathbb{R}_ε^n sebagai himpunan vektor berdimensi n yang entri-entri merupakan bilangan di \mathbb{R}_ε . Entri-entri ke- i dari vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_\varepsilon^n$ dinotasikan sebagai $[\mathbf{x}]_i = x_i \in \mathbb{R}_\varepsilon$ untuk $i \in \underline{n}$. Dalam hal ini \mathbf{x} ditulis sebagai

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Kemudian untuk $\alpha \in \mathbb{R}_\varepsilon$ dan $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_{\max}^n$ didefinisikan dua operasi biner \oplus dan \otimes yaitu

$$\begin{aligned} [\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}]_i &\stackrel{\text{def}}{=} x_i \oplus y_i = \max\{x_i, y_i\} \\ [\alpha \otimes \mathbf{x}]_i &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha \otimes x_i = \alpha + x_i \end{aligned}$$

untuk $i \in \underline{n}$. Selanjutnya berikut ini diberikan definisi vektor atas aljabar max-plus

Definisi 2.3.7. *Vektor atas aljabar max-plus merupakan himpunan tak-kosong \mathbb{R}_ε^n beserta dua operasi biner \oplus dan \otimes yang dinotasikan sebagai $\mathbb{R}_{\max}^n = (\mathbb{R}_\varepsilon^n, \oplus, \otimes)$.*

Vektor atas aljabar max-plus \mathbb{R}_{\max}^n merupakan representasi dari matriks atas aljabar max-plus ukuran $n \times 1$. Sehingga jika terdapat perkalian matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$ dengan vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\max}^m$ sama halnya perkalian matriks dengan matriks dengan ukuran yang bersesuaian, yaitu

$$[A \otimes \mathbf{x}]_i \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{k=1}^m \{a_{i,k} \otimes x_k\} = \max_{k \in \underline{m}} \{a_{i,k} \otimes x_k\}, \quad i \in \underline{n},$$

dalam hal ini $A \otimes \mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\max}^n$.

2.4 Teori Spektral

Dalam subbab ini dijelaskan mengenai teori spektral yang meliputi nilai eigen, vektor eigen dan *eigenmode* pada matriks persegi reguler atas aljabar max-plus. Dalam Bagian 2.4.1 dijelaskan mengenai teori matriks dan graf, serta dijelaskan pula pengertian matriks persegi reguler tereduksi dan matriks persegi reguler tak-tereduksi atas aljabar max-plus. Dalam Bagian 2.4.2 dijelaskan mengenai nilai eigen dan vektor eigen pada matriks tak-tereduksi atas aljabar max-plus. Kemudian dalam Bagian 2.4.3 dijelaskan mengenai algoritma *eigenmode* tergeneralisasi dari matriks persegi reguler tereduksi atas aljabar max-plus (Königsberg, 2009).

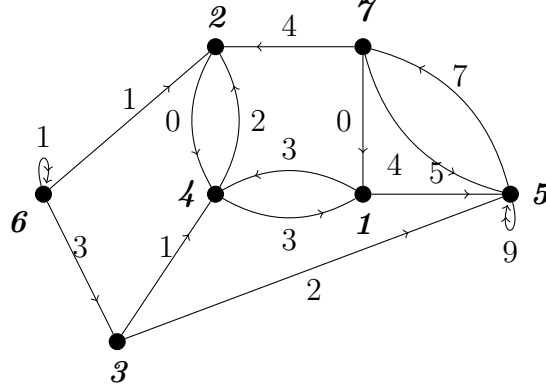
2.4.1 Matriks dan Teori Graf

Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, suatu graf berarah dari matriks A adalah $\mathcal{G}(A) = (\mathcal{N}, \mathcal{D})$. Graf $\mathcal{G}(A)$ mempunyai n titik, himpunan semua titik dari $\mathcal{G}(A)$ dinyatakan oleh \mathcal{N} . Himpunan semua arc (garis) dari graf $\mathcal{G}(A)$ atau pasangan terurut dari beberapa titik di \mathcal{N} dinotasikan oleh \mathcal{D} . Suatu garis dari titik j ke titik i exist (ada) bila $a_{i,j} = \varepsilon$, garis ini dinotasikan oleh (j, i) , dengan demikian $(j, i) \in \mathcal{D}$. Bobot dari garis (j, i) adalah nilai dari $a_{i,j}$ yang dinotasikan oleh $w(j, i) = a_{i,j} \in \mathbb{R}_\varepsilon$. Bila $a_{i,j} = \varepsilon$, maka garis (j, i) tidak ada.

Contoh 2.4.1. Dberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{7 \times 7}$

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & 1 & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 3 & 0 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 5 & \varepsilon & 2 & \varepsilon & 9 & \varepsilon & 4 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Untuk matriks A dapat direpresentasikan sebagai graf berarah $\mathcal{G}(A) = (\mathcal{N}, \mathcal{D})$ dengan himpunan titiknya $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ dan himpunan garisnya $\mathcal{D} = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (5, 5), (5, 7), (6, 2), (6, 3), (6, 6), (7, 1), (7, 2), (7, 5)\}$. Bobot untuk setiap garis di \mathcal{D} yaitu $w(2, 4) = w(7, 1) = 0$, $w(3, 4) = w(6, 2) = w(6, 6) = 1$, $w(3, 5) = w(4, 2) = 2$, $w(1, 4) = w(4, 1) = w(6, 3) = 3$, $w(7, 2) = w(7, 5) = 4$, $w(1, 5) = 5$, $w(5, 7) = 7$, $w(5, 5) = 9$. Bentuk representasi graf $\mathcal{G}(A)$ diberikan dalam Gambar 2.7, dimana untuk setiap titik graf $\mathcal{G}(A)$ diberi label yang lebih tebal.



Gambar 2.7: Graf $\mathcal{G}(A)$

Suatu barisan garis $p = (i_1, i_2)(i_2, i_3) \cdots (i_{l-1}, i_l)$ dari suatu graf $\mathcal{G}(A)$ dinamakan *path* dengan panjang $|p|_l$, dimana $|p|_l$ menyatakan banyaknya garis pada path p . Suatu path dikatakan *elementer* bila semua titik yang termuat dalam path tersebut berbeda. Himpunan semua path dari titik i ke titik j dengan panjang l dinotasikan sebagai $P(i, j; l)$. Bobot dari path p dinotasikan sebagai $|p|_w$ yang didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} |p|_w &= w(i_1, i_2) + w(i_2, i_3) + \cdots + w(i_{l-1}, i_l) \\ &= a_{i_2, i_1} + a_{i_3, i_2} + \cdots + a_{i_l, i_{l-1}} \\ &= a_{i_l, i_{l-1}} + \cdots + a_{i_3, i_2} + a_{i_2, i_1}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Tinjau kembali persamaan 2.18, jika dikaitkan dengan persamaan 2.19 maka diperoleh suatu hubungan antara elemen $[A^{\otimes k}]_{i,j}$ dengan bobot maksimal dari semua path dengan panjang k dari titik j ke titik i , asalkan suatu path ada.

Teorema 2.4.2 (Subiono, 2017). *Diberikan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$. Untuk setiap $k \geq 1$ berlaku*

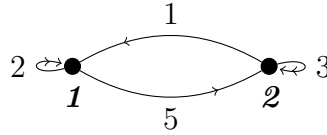
$$[A^{\otimes k}]_{i,j} = \max\{|p|_w : p \in P(j, i; k)\}$$

dengan $[A^{\otimes k}]_{i,j} = \varepsilon$ pada kasus $P(j, i; k)$ adalah himpunan kosong, yaitu ketika tidak ada path dengan panjang k dari j ke i dalam $\mathcal{G}(A)$.

Sebagaimana yang telah dijelaskan dalam Bagian 2.2.1, terdapat dua bentuk graf berdasarkan sifat keterhubungannya. Graf $\mathcal{G}(A) = (\mathcal{N}, \mathcal{D})$ disebut *strongly connected* jika dan hanya jika $u \xrightarrow{*} v$ untuk setiap $u, v \in \mathcal{N}$. Matriks dengan representasi graf *strongly connected* disebut sebagai *matriks*

tak-tereduksi. Dalam hal ini matriks $A = \begin{bmatrix} \varepsilon \end{bmatrix}$ termasuk kedalam matriks tak-tereduksi. Sedangkan graf $\mathcal{G}(A) = (\mathcal{N}, \mathcal{D})$ disebut tidak *strongly connected* jika dan hanya jika $u \not\stackrel{*}{\rightarrow} v$ untuk beberapa $u, v \in \mathcal{N}$. Matriks dengan representasi graf tidak *strongly connected* disebut sebagai *matriks tereduksi*. Lebih lanjut matriks tereduksi A merupakan matriks yang dapat didekomposisi menjadi matriks blok segitiga atas \bar{A} dengan blok diagonalnya merupakan matriks persegi reguler tak-tereduksi. Hal ini dapat dijelaskan menggunakan dekomposisi *strongly connected* sebagaimana yang telah dijelaskan dalam Bagian 2.2.1.

Contoh 2.4.3. Graf $\mathcal{G}(A)$ dalam Gambar 2.7 merupakan graf tidak *strongly connected*, sebab tidak ada path yang menghubungkan dari titik 3 ke 6. Dengan demikian matriks A pada Contoh 2.4.1 merupakan matriks tereduksi. Sedangkan contoh bentuk graf *strongly connected* diberikan sebagai berikut



Gambar 2.8: Graf *strongly connected* $\mathcal{G}(B)$.

Graf diatas memiliki matriks representasi tak-tereduksi yaitu $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$.

Sirkuit merupakan *path* elementer tertutup, yaitu $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{l-1}, i_1)$. Himpunan semua sirkuit di $\mathcal{G}(A)$ dinotasikan sebagai $\mathcal{C}(A)$. Sirkuit rata-rata adalah bobot dari suatu sirkuit dibagi banyaknya garis pada sirkuit tersebut. Sebarang sirkuit dengan sirkuit rata-rata maksimum dinamakan *sirkuit kritis*. Sirkuit rata-rata maksimum dari suatu graf $\mathcal{G}(A)$ adalah suatu bagian penting dari matriks A , sebab sirkuit rata-rata maksimum berkaitan dengan suatu karakteristik dari matriks A . Untuk matriks persegi A berukuran $n \times n$, maka graf kritis dari $\mathcal{G}(A)$ dinotasikan dengan $\mathcal{G}^c(A) = (\mathcal{N}^c, \mathcal{D}^c)$ adalah graf yang terdiri dari himpunan titik dan garis yang berada pada sirkuit kritis dari graf $\mathcal{G}(A)$. Dalam (Subiono, 2017) dijelaskan bahwa suatu titik $i \in \mathcal{N}^c(A)$ dapat disebut sebagai *titik kritis*. Demikian pula, *subpath* dari suatu sirkuit kritis disebut sebagai *path kritis*. Berikut ini diberikan keujudan dari sirkuit rata-rata maksimum untuk matriks persegi tak-tereduksi. Sebelum membahas sifat ini, diberikan notasi $\lambda(A)$ yang menyatakan nilai sirkuit rata-rata maksimum dari suatu matriks persegi A .

Teorema 2.4.4 (Subiono, 2017). *Bila $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ tak-tereduksi, maka ada $\lambda(A)$ yang diberikan oleh*

$$\lambda(A) = \bigoplus_{k=1}^n \frac{\text{trace}(A^{\otimes k})}{k}, \text{ dengan } \text{trace}(A) = \bigoplus_{i=1}^n a_{i,i}.$$

Contoh 2.4.5. *Perhatikan kembali matriks tak-tereduksi B pada Contoh 2.4.3. Berdasarkan Teorema 2.4.4 dapat diperoleh nilai rata-rata sirkuit maksimum dari matriks A yaitu,*

$$\begin{aligned} \lambda(B) &= \bigoplus_{k=1}^2 \frac{\text{trace}(B^{\otimes k})}{k} \\ &= \frac{\text{trace}(B)}{1} \oplus \frac{\text{trace}(B^{\otimes 2})}{2} \\ &= \frac{2 \oplus 3}{1} \oplus \frac{6 \oplus 6}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

2.4.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai eigen dan vektor eigen yang dibahas dalam bagian ini adalah berkaitan dengan suatu sistem event diskrit dalam aljabar max-plus berbentuk,

$$\mathbf{x}(k+1) = A \otimes \mathbf{x}(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

atau dapat juga ditulis sebagai

$$\mathbf{x}(k) = A^{\otimes k} \otimes \mathbf{x}(0), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.20)$$

untuk suatu vektor awal $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}_{\max}^n$. Pengertian nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian dari suatu matriks persegi A berukuran $n \times n$ dalam Persamaan 2.20 yaitu bila diberikan suatu persamaan:

$$A \otimes \mathbf{x} = \lambda \otimes \mathbf{x} \quad (2.21)$$

dimana masing-masing $\lambda \in \mathbb{R}$ dan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\max}^n$ dinamakan **nilai eigen** dan **vektor eigen** dari matriks A dengan $\mathbf{x} \neq [\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon]^\top$. Interpretasi nilai eigen dan vektor eigen pada sistem SED atas aljabar max-plus dapat dijelaskan sebagai berikut. Berdasarkan Persamaan 2.21 maka sistem event diskrit

berbentuk Persamaan 2.20 dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k) &= A^{\otimes k} \otimes \mathbf{x}(0) \\ &= \lambda^{\otimes k} \otimes \mathbf{x}(0) \\ &= k \times \lambda \otimes \mathbf{x}(0), \quad k = 1, 2, 3, \dots\end{aligned}$$

Dari persamaan diatas diperoleh yaitu $x_i(k) = k \times \lambda + x_i(0)$, $i \in \underline{n}$ yang artinya serangkaian aktifitas x_i , $i \in \underline{n}$ dalam sistem tersebut dapat dijalankan secara periodik dengan periode λ dan waktu awal $\mathbf{x}(0)$. Keberadaan nilai eigen dan vektor eigen dalam SED juga memberikan peranan yang sangat penting dalam hal waktu komputasinya, hal ini tampak pada saat menghitung $\mathbf{x}(k) = k \times \lambda \otimes \mathbf{x}(0)$ akan lebih cepat dibanding $\mathbf{x}(k) = A^{\otimes k} \otimes \mathbf{x}(0)$.

Perilaku periodik dari Persamaan 2.20 baik untuk matriks A yang tak-tereduksi maupun yang tereduksi erat kaitannya dengan apa yang dinamakan **vektor waktu-sikel**, dimana keberadaan vektor waktu-sikel tidak bergantung pada vektor keadaan awal $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}_{\max}^n$ atau dengan kata lain keberadaannya dalam suatu sistem adalah tunggal, notasi $\mathbf{x}(k; \mathbf{x}(0))$ menyatakan kebergantungan $\mathbf{x}(k)$ pada nilai awal $\mathbf{x}(0)$, yaitu $\mathbf{x}(k) = A^{\otimes k} \otimes \mathbf{x}(0)$.

Definisi 2.4.6 (Subiono, 2017). *Misalkan $\{\mathbf{x}(k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ adalah suatu barisan di \mathbb{R}_{\max}^n dan diasumsikan bahwa untuk semua $j \in \underline{n}$ limit berikut*

$$\eta_j \stackrel{def}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_j(k)}{k}$$

ada. Vektor $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]^\top$ dinamakan vektor waktu-sikel (cycle-time vector) dari barisan $\mathbf{x}(k)$. Bila semua nilai η_j sama, nilai ini dinamakan rata-rata pertumbuhan asimtotik dari barisan $\mathbf{x}(k)$.

Teorema 2.4.7 (Subiono, 2017). *Tinjau relasi berulang $\mathbf{x}(k) = A^{\otimes k} \otimes \mathbf{x}(0)$ untuk $k > 0$ dengan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ dan $\mathbf{x}(0)$ sebagai suatu kondisi awal. Bila $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}_{\max}^n$ suatu kondisi awal tertentu yang memenuhi $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{x}(k; \mathbf{x}(0))}{k}$ ada, maka keberadaan limit tersebut ada untuk sebarang kondisi awal $\mathbf{y}(0) \in \mathbb{R}_{\max}^n$.*

Nilai eigen, vektor waktu-sikel dan vektor eigen dari matriks persegi tak-tereduksi diberikan dalam bentuk teorema-teorema sebagai berikut. Sebelumnya didefinisikan matriks berikut

$$A_\lambda^* \stackrel{def}{=} E \oplus A_\lambda^+, \text{ dimana } A_\lambda^+ = \bigoplus_{i=1}^n A_\lambda^{\otimes i} \text{ untuk } A_\lambda \stackrel{def}{=} \lambda^{\otimes -1} \otimes A.$$

Teorema 2.4.8 (Subiono, 2017). *Untuk setiap matriks tak-tereduksi $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$ memiliki satu dan hanya satu nilai eigen. Nilai eigen tersebut dinotasikan dengan $\lambda(A)$, merupakan suatu nilai berhingga dan sama dengan sirkuit rata-rata maksimum pada $\mathcal{G}(A)$, yaitu*

$$\lambda(A) = \max_{p \in \mathcal{C}(A)} \frac{|p|_w}{|p|_l}.$$

Teorema 2.4.9 (Subiono, 2017). *Jika graf komunikasi $\mathcal{G}(A)$ dari matriks $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$ memiliki sirkuit rata-rata maksimum berhingga $\lambda(A)$, maka skalar $\lambda(A)$ adalah suatu nilai eigen dari A , dan kolom $[A_\lambda]_{\bullet, \eta}$ adalah suatu vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ , untuk setiap titik $\eta \in \mathcal{N}^c$.*

Teorema 2.4.10 (Subiono, 2017). *Diberikan relasi berulang $\mathbf{x}(k+1) = A \otimes \mathbf{x}(k)$ untuk $k > 0$ dengan $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$ adalah matriks tak-tereduksi mempunyai nilai-eigen $\lambda(A)$. Maka untuk semua $j \in \underline{n}$*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_j(k; \mathbf{x}(0))}{k} = \lambda$$

untuk sebarang kondisi awal $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}_\varepsilon^n$.

Contoh 2.4.11. *Perhatikan kembali matriks tak-tereduksi B pada Contoh 2.4.3. Dalam Contoh 2.4.5 telah diperoleh nilai eigen dari matriks B yaitu $\lambda(B) = 3$ dimana nilai ini juga dapat diperoleh dari sirkuit kritis dari graf $\mathcal{G}(B)$ dalam Gambar 2.8, yaitu $\lambda(B) = \frac{w(2,2)}{1} = \frac{w(1,2)+w(2,1)}{2} = 3$ sehingga diperoleh $\mathcal{N}^c = \{1, 2\}$. Kemudian berdasarkan Teorema 2.4.9, dapat diperoleh vektor eigen dari matriks B dengan langkah-langkah sebagai berikut*

$$\begin{aligned} \bullet \quad B_\lambda &= \lambda^{\otimes -1} \otimes B \\ &= 3^{\otimes -1} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3+2 & -3+1 \\ -3+5 & -3+3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\bullet \quad B_\lambda^+ = \bigoplus_{i=1}^2 B_\lambda^{\otimes i}$$

$$\begin{aligned}
&= B_\lambda \oplus B_\lambda^{\otimes 2} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad B_\lambda^* &= E \oplus B_\lambda^+ \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Dari hasil diatas maka dapat diperoleh vektor eigen untuk $\mathbf{v}_1 = [B_\lambda^*]_{\bullet,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ atau $\mathbf{v}_2 = [B_\lambda^*]_{\bullet,2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Oleh karena \mathbf{v}_1 dan \mathbf{v}_2 saling kombinasi linier yaitu $\mathbf{v}_1 = 2 \otimes \mathbf{v}_2$, maka vektor eigen dari matriks B cukup diambil salah satu saja, misalkan $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$. Kemudian berdasarkan Teorema 2.4.10 maka diperoleh vektor waktu-sikel dari matriks tereduksi B yaitu $\eta = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

2.4.3 Eigenmode

Pada bagian ini diberikan pengertian eigenmode pada matriks reguler A sebagaimana definisi berikut.

Definisi 2.4.12. Suatu pasangan vektor $(\eta, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ disebut eigenmode tergeneralisasi dari matriks reguler A jika untuk setiap $k \geq 0$ memenuhi

$$A \otimes (k \times \eta_{\mathbf{v}}) = (k+1) \times \eta + \mathbf{v}. \quad (2.22)$$

Dalam Persamaan 2.22 bila $k = 0$ didapat

$$A \otimes \mathbf{v} = \eta + \mathbf{v} \quad (2.23)$$

dan bila semua elemen vektor η adalah konstan bernilai $\lambda \in \mathbb{R}$, maka Persamaan 2.23 menjadi

$$A \otimes \mathbf{v} = \lambda \otimes \mathbf{v}. \quad (2.24)$$

Dengan demikian λ adalah suatu nilai eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan vektor eigen \mathbf{v} . Dalam hal yang demikian vektor η adalah perluasan nilai eigen dari matriks A . Dari apa yang telah didiskusikan, terlihat bahwa vektor η erat kaitannya dengan vektor waktu-sikel. Jadi bila beberapa elemen dari vektor η mempunyai beberapa nilai yang berbeda, maka dipastikan bahwa matriks A dalam Persamaan 2.22 adalah tereduksi atau ekuivalen graf $\mathcal{G}(A)$ tidak *strongly connected*. Tetapi hal ini tidak berlaku sebaliknya.

Perlu diperhatikan bahwa eigenmode dari matriks reguler dapat dipandang sebagai suatu perluasan dari pasangan nilai eigen maupun vektor eigen. Pernyataan tersebut dapat ditulis dalam bentuk lemma berikut.

Lema 2.4.13 (Subiono, 2017). *Bila pasangan vektor (η, \mathbf{v}) adalah eigenmode tergeneralisasi dari matriks reguler A , maka vektor η merupakan perluasan nilai eigen dari matriks A dan vektor \mathbf{v} adalah vektor eigennya. Lebih lanjut, vektor $\eta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{x}^{(k)}}{k}$, dimana semua elemen vektor η bernilai konstan di \mathbb{R} .*

BAB 3

METODE PENELITIAN

Dalam bab ini dijelaskan tentang tahapan-tahapan penelitian yang dilakukan untuk menyelesaikan masalah yang telah dikemukakan pada rumusan masalah. Setiap tahapan penelitian menggunakan landasan teori yang diberikan pada Bab 2. Tahapan-tahapan penelitian dijelaskan lebih rinci di dalam subbab-subbab berikut ini.

a. Studi Literatur.

Pada tahap ini, dipelajari tentang dekomposisi Dulmage-Mendelsohn beserta beberapa teorema terkait hasil dekomposisi tersebut. Kemudian dipelajari mengenai vektor waktu-sikel pada sistem yang dibangun oleh matriks persegi reguler tereduksi atas aljabar max-plus. Selain itu, dipelajari pula tentang keterkaitannya vektor waktu-sikel dengan nilai eigen dan *eigenmode* pada sistem tersebut. Adapun beberapa penelitian terdahulu yang dipelajari pada tahap ini yaitu,

i. *Matrices and Matroids for Systems Analysis* (Murota, 2000)

Buku yang ditulis oleh Kazuo Murota ini berisikan penjelasan mengenai dekomposisi *strongly connected* dan dekomposisi Dulmage-Mendelsohn. Dalam buku ini dipelajari secara mendalam terkait dekomposisi Dulmage-Mendelsohn beserta sifat-sifatnya terkait pada graf bipartisi yang merupakan representasi dari suatu matriks persegi.

ii. Aljabar Min-Max Plus dan Terapannya (Subiono)

Buku yang ditulis oleh SUBiono berisikan penjelasan mengenai sistem event diskrit yang dibangun oleh matriks persegi atas aljabar max-plus. Dalam buku ini dapat dipelajari mengenai vektor waktu-sikel dari suatu sistem event diskrit beserta keterkaitannya dengan nilai eigen dan *eigenmode* pada sistem tersebut.

iii. A Generalized Eigenmode Algorithm for Reducible Regular Matrices over the Max-Plus Algebra (Konigsberg, 2009)

Dalam penelitian yang dilakukan oleh Zvi Retchkiman Konigsberg

menghasilkan suatu algoritma untuk memperoleh *eigenmode* dari matriks persegi reguler tereduksi atas aljabar max-plus. Namun contoh-contoh matriks persegi reguler tereduksi yang diberikan langsung dalam bentuk matriks blok segitiga atas.

- b. Memodifikasi Algoritma Dekomposisi Dulmage-Mendelsohn pada Matriks Tereduksi atas Aljabar Max-Plus.

Pada tahap ini, dilakukan modifikasi algoritma dekomposisi Dulmage-Mendelsohn. Modifikasi ini dilakukan dengan cara merubah graf bantu $\tilde{G}_M = (N^+ \cup N^-, \tilde{D})$ menjadi bentuk graf bantu yang lain yaitu $\tilde{G}_M = (N^+ \cup N^-, \tilde{D}^*)$. Kemudian untuk matching maksimumnya menggunakan algoritma (Alom, 2010) dimana algoritma ini memiliki waktu komputasi yang lebih cepat dibanding dengan algoritma sebelumnya (Ahuja, 1993).

- c. Menganalisis Nilai Eigen yang Mungkin pada Matriks Blok Segitiga Atas Hasil dari Dekomposisi Dulmage-Mendelsohn pada Matriks Tereduksi.

Pada tahap ini, dilakukan analisis mengenai bentuk vektor waktu-sikel $\boldsymbol{\eta}$ dari matriks blok segitiga atas \bar{A} dari suatu matriks tereduksi A . Setiap entri-entri dari $\boldsymbol{\eta}$ dinotasikan sebagai η_i merupakan calon nilai eigen dari matriks \bar{A} . Hal ini dapat dicek dengan adanya penyelesaian vektor v dalam persamaan $A \otimes v = \lambda \otimes v$ untuk suatu $\lambda = \eta_i$.

- d. Menerapkan Dekomposisi Dulmage-Mendelsohn untuk Memodifikasi Algoritma *Eigenmode* Matriks Reguler Tereduksi atas Aljabar Max-Plus.

Pada tahap ini, dilakukan modifikasi pada algoritma *eigenmode* matriks reguler tereduksi atas aljabar max-plus. Modifikasi dilakukan pada langkah kedua algoritma tersebut yaitu menggunakan dekomposisi Dulmage-Mendelsohn untuk mengkonstruksi matriks blok segitiga atasnya.

- e. Penarikan kesimpulan dan penyusunan laporan penelitian.

Pada tahap ini, diperoleh beberapa kesimpulan yang berkaitan dengan topik penelitian. Kesimpulan-kesimpulan atas penelitian yang dilakukan tersebut merepresentasikan tercapainya tujuan penelitian untuk menyelesaikan masalah-masalah yang dirumuskan. Pada tahap ini, juga dilakukan penyusunan laporan penelitian yang sistematis. Hal ini dilakukan agar pembaca dapat dengan mudah memahami penelitian.

BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini, dibahas hasil penelitian sebagai penyelesaian dari beberapa masalah yang telah dipaparkan pada rumusan masalah. Dalam Bagian 4.1 dibahas mengenai modifikasi algoritma dekomposisi Dulmage-Mendelsohn (disebut dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi). Modifikasi algoritma dekomposisi ini digunakan untuk mendekomposisi sebarang matriks persegi reguler tereduksi atas aljabar max-plus menjadi matriks blok segitiga atas, dimana blok diagonalnya merupakan matriks persegi yang tidak dapat didekomposisi lagi menjadi matriks blok segitiga atas yang lebih sederhana. Dalam Bagian 4.2 dibahas terkait pengaplikasian dekomposisi Dulmage-mendelsohn termodifikasi, yaitu untuk mendekomposisi matriks persegi reguler tereduksi A menjadi matriks blok segitiga atas \bar{A} , sehingga hasil matriks \bar{A} ini dapat digunakan untuk mempermudah dalam menganalisis vektor waktu-sikel dari matriks A , dimana entri-entri dari vektor waktu-sikel tersebut merupakan calon-calon nilai eigen dari matriks A . Kemudian dalam Bagian 4.3 juga dibahas terkait penerapan dekomposisi Dulmage-mendelsohn termodifikasi pada langkah kedua algoritma *eigenmode* matriks persegi reguler tereduksi (Königsberg, 2009).

4.1 Modifikasi Dekomposisi Dulmage-Mendelsohn atas Aljabar Max-Plus

Diberikan matriks A atas aljabar max-plus berukuran $n \times n$ yang entri-entrinya pada baris ke- i dan kolom ke- j dinotasikan sebagai $[A]_{i,j} = a_{i,j}$. Representasi graf bipartisi dari matriks A yaitu $G(A) = (N^+, N^-; D)$ dengan himpunan titiknya terdiri dari dua himpunan yang saling asing dinotasikan sebagai N^+ dan N^- dengan masing-masing himpunan titik tersebut memiliki sebanyak n titik. Untuk N^+ merepresentasikan himpunan kolom pada matriks A , ditulis sebagai $N^+ = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$. Sedangkan untuk N^- merepresentasikan himpunan baris pada matriks A , ditulis sebagai $N^- = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$. Himpunan garis di $G(A)$ didefinisi sebagai $D = \{(c_j, r_i) \mid c_j \in N^+, r_i \in N^-, a_{i,j} \neq \varepsilon\}$.

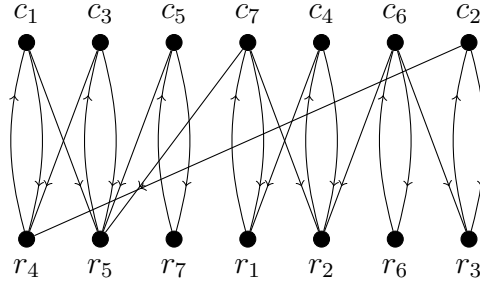
Contoh 4.1.1. Perhatikan kembali matriks A pada contoh 2.2.3. Dengan membawa matriks A kedalam aljabar max-plus maka bentuk matriks A menjadi

$$A = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & a_{1,4} & \varepsilon & \varepsilon & a_{1,7} \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & a_{2,4} & \varepsilon & a_{2,6} & a_{2,7} \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & a_{3,6} & \varepsilon \\ 4 & a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 5 & a_{5,1} & \varepsilon & a_{5,3} & \varepsilon & a_{5,5} & \varepsilon & a_{5,7} \\ 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & a_{6,6} & \varepsilon \\ 7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & a_{7,5} & \varepsilon & \varepsilon \end{array}.$$

Sama halnya pada aljabar biasa, representasi graf bipartisi dari matriks A adalah $G(A) = (N^+, N^-; D)$ sebagaimana pada Gambar 2.3.

Sebagaimana yang telah dijelaskan sebelumnya, bahwa dekomposisi Dulmage-Mendelsohn digunakan untuk mendekomposisi sebarang matriks persegi menjadi matriks blok segitiga atas. Blok diagonal matriks segitiga atas hasil dekomposisi ini dapat berupa matriks persegi ataupun matriks persegi panjang yang tidak dapat didekomposisi lagi menjadi matriks blok segitiga atas sebagaimana pada Contoh 2.2.16. Dilakukannya modifikasi pada dekomposisi ini supaya setiap blok diagonalnya merupakan matriks persegi yang tidak dapat didekomposisi lagi menjadi matriks blok segitiga atas. Modifikasi algoritma dekomposisi Dulmage-Mendelsohn dilakukan dengan merubah graf bantu $\tilde{G}_M = (N^+ \cup N^-, \tilde{D})$ menjadi $\tilde{G}_M = (N^+ \cup N^-, \tilde{D}^*)$ dengan $\tilde{D}^* = \{(u, v) \mid (u, v) \in D \text{ atau } (v, u) \in M \text{ atau } u = u_i \in S^+, v = v_i \in S^- \text{ untuk } i = 1, \dots, |S^+| \text{ atau } v = v_i \in S^-, u = u_i \in S^+ \text{ untuk } i = 1, \dots, |S^+| \text{ dimana } S^+ = N^+ \setminus \partial^+ M \text{ dan } S^- = N^- \setminus \partial^- M\}$.

Contoh 4.1.2. Perhatikan kembali graf bipartisi $G(A)$ pada Gambar 2.3 dan matching maksimum M pada Contoh 2.2.7. Sebagaimana yang telah dijelaskan sebelumnya, dari graf bipartisi $G(A)$ dan matching maksimum M maka dapat diperoleh graf bantu $\tilde{G}_M = (N^+ \cup N^-, \tilde{D}^*)$ dengan $\tilde{D}^* = D \cup \{(c_1, r_4), (c_3, r_5), (c_5, r_7), (c_7, r_1), (c_4, r_2), (c_6, r_6), (c_2, r_3)\}$ sebagaimana diberikan dalam gambar berikut,



Gambar 4.1: Graf bantu $\tilde{G}_M(A) = (N^+ \cup N^-, \tilde{D}^*)$.

Dengan merubah graf bantu yang telah ada menjadi graf bantu baru yaitu $\tilde{G}_M = (N^+ \cup N^-, \tilde{D}^*)$, maka langkah ke 2-4 pada Algoritma 2 dapat diabaikan. Modifikasi dari algoritma dekomposisi Dulmage-Mendelsohn ini diberikan sebagai berikut.

Algoritma 3: *Dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi pada graf bipartisi $G = (N^+, N^-; D)$.*

1. Tentukan matching maksimum M pada graf bipartisi $G = (N^+, N^-; D)$ menggunakan Algoritma 2;
2. Tentukan N_k ($k = 1, 2, \dots, b$) yaitu sebagai komponen-komponen strongly connected pada graf bantu $\tilde{G}_M = (N^+ \cup N^-, D)$;
3. Tentukan $G_k = (N_k^+, N_k^-; D_k)$ sebagai subgraf partisi dari graf G berdasarkan N_k ($k = 1, 2, \dots, b$);
4. Susun ulang urutan dari $\{G_k \mid k = 1, 2, \dots, b\}$ berdasarkan urutan parsial \preceq dimana $G_k \preceq G_l \Leftrightarrow v_l \xrightarrow{*} v_k$ di \tilde{G}_M untuk beberapa $v_k \in N_k$ dan $v_l \in N_l$;

Contoh 4.1.3. Perhatikan kembali graf bipartisi $G(A)$ pada Contoh 2.2.5. Berikut ini dijelaskan langkah-langkah dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi pada graf bipartisi $G(A)$ menggunakan Algoritma 3. Langkah pertama: menentukan matching maksimum M pada graf bipartisi $G(A)$ telah dibahas dalam Contoh 2.2.7 sedemikian hingga dapat diperoleh graf bantu $\tilde{G}_M = (N^+ \cup N^-, \tilde{D}^*)$ sebagaimana dalam Contoh 4.1.2. Langkah kedua: diperoleh komponen-komponen strongly connected yaitu $N_1 = \{c_1, c_3, r_4, r_5\}$, $N_2 = \{c_2, r_3\}$, $N_3 = \{c_5, r_7\}$, $N_4 = \{c_7, c_4, r_1, r_2\}$, dan $N_5 = \{c_6, r_6\}$ pada graf $\tilde{G}_M(A)$. Langkah ketiga: apabila dikembalikan kedalam graf bipartisi $G(A)$, berdasarkan komponen-komponen $\{N_k \mid k = 1, 2, 3, 4, 5\}$ maka dapat

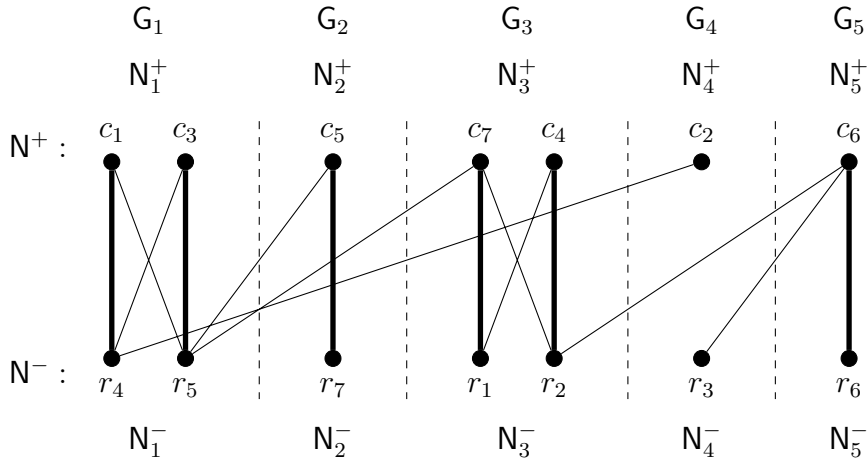
diperoleh komponen-komponen dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi yaitu $\{G_k(A) = (N_k^+, N_k^-, D_k) \mid k = 1, \dots, 5\}$ dengan

$$\begin{aligned} \{N_1^+; N_2^+; N_3^+; N_4^+; N_5^+\} &= \{c_1, c_3; c_5; c_7, c_4; c_6; c_2\} \\ \{N_1^-; N_2^-; N_3^-; N_4^-; N_5^-\} &= \{r_4, r_5; r_7, r_1, r_2, r_6; r_3\} \\ \{D_1; D_2; D_3; D_4; D_5\} &= \{(c_1, r_4), (c_1, r_5), (c_3, r_4), (c_3, r_5); (c_5, r_7); \\ &\quad (c_7, r_1), (c_7, r_2), (c_4, r_1), (c_4, r_2); (c_6, r_6); \emptyset\}. \end{aligned}$$

Langkah keempat: dilakukan pengurutan ulang pada $\{G_k(A) \mid k = 1, \dots, b\}$ berdasarkan urutan parsial \preceq sedemikian hingga dapat diperoleh komponen-komponen dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi pada graf bipartisi $G(A)$ yaitu $\{G_k(A) = (N_k^+, N_k^-, D_k) \mid k = 1, \dots, 5\}$ dengan

$$\begin{aligned} \{N_1^+; N_2^+; N_3^+; N_4^+; N_5^+\} &= \{c_1, c_3; c_5; c_7, c_4; c_2; c_6\} \\ \{N_1^-; N_2^-; N_3^-; N_4^-; N_5^-\} &= \{r_4, r_5; r_7; r_1, r_2; r_3; r_6\} \\ \{D_1; D_2; D_3; D_4; D_5\} &= \{(c_1, r_4), (c_1, r_5), (c_3, r_4), (c_3, r_5); (c_5, r_7); \\ &\quad (c_7, r_1), (c_7, r_2), (c_4, r_1), (c_4, r_2); \emptyset; (c_6, r_6)\} \end{aligned}$$

sebagaimana ditunjukkan oleh garis vertikal putus-putus pada Gambar 4.2 berikut,



Gambar 4.2: Dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi pada $G(A)$

Sebagaimana yang telah dijelaskan sebelumnya, partisi $\{N_k^+ \mid k = 1, 2, \dots, 5\} = \{c_1; c_3; c_5; c_7, c_4; c_2; c_6\}$ merepresentasikan pemetaan permutasi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, sehingga diperoleh matriks permutasi kolom Q dengan

entri-entri $Q(1,1) = Q(3,2) = Q(5,3) = Q(7,4) = Q(4,5) = Q(2,6) = Q(6,7) = 0$ dan ε untuk entri yang lainnya. Begitupun juga untuk $\{N_k^- \mid k = 1, 2, \dots, b\} = \{r_4; r_5; r_7; r_1, r_2; r_3; r_6\}$ merepresentasikan pemetaan permutasi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, sehingga diperoleh matriks permutasi baris P dengan entri-entri $P(1,4) = P(2,5) = P(3,7) = P(4,1) = P(5,2) = P(6,3) = P(7,6) = 0$ dan ε untuk entri yang lainnya. Berikut diberikan bentuk dari matriks P dan Q ,

$$P = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian dapat diperoleh matriks blok segitiga atas \bar{A} yang ditulis seperti halnya berikut supaya mempermudah dalam penjelasan,

$$\bar{A} = P \otimes A \otimes Q = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & 1 & 3 & 5 & 7 & 4 & 2 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{array} \begin{array}{|cccccc|} \hline a_{4,1} & a_{4,3} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & a_{4,2} & \varepsilon \\ a_{5,1} & a_{5,3} & a_{5,5} & a_{5,7} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & a_{7,5} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & a_{1,7} & a_{1,4} & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & a_{2,7} & a_{2,4} & \varepsilon & a_{2,6} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & a_{3,6} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & a_{6,6} \\ \hline \end{array} \end{array}.$$

Tampak bahwa setiap blok diagonal dari matriks \bar{A} merupakan matriks persegi.

Sebagaimana yang telah dijelaskan dalam Bagian 2.2.2, salah satu bagian terpenting dari dekomposisi Dulmage-Mendelsohn adalah menentukan himpunan *matching* maksimum M dari graf bipartisi G . Pada tahun 2010, beberapa orang peneliti bernama B. M. Monjurul Alom, Someresh Das dan Md. Saiful Islam dari Gazipur-Bangladesh telah berhasil membangun suatu algoritma untuk menentukan *matching* maksimum dari graf bipartisi $G(A)$ yang lebih cepat dari Algoritma 1, yaitu dengan waktu komputasi $O(2|N^+|)$. Hasil dari algoritma ini mungkin memberikan elemen-elemen *matching* yang

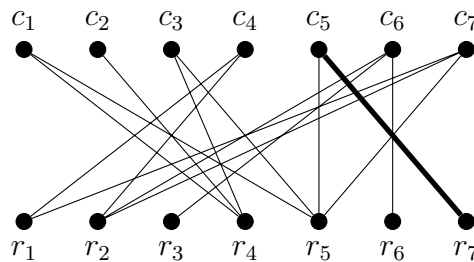
berbeda, namun dengan kardinalitas yang sama dari algoritma sebelumnya. Berikut algoritma yang dimaksud,

Algoritma 4: (Alom dkk, 2010) *Menentukan matching maksimum M pada graf bipartisi $G = (N^+, N^-; D)$*

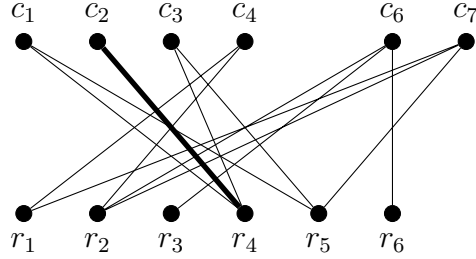
1. $M \leftarrow \emptyset$;
2. While $(D \neq \emptyset)$ {
3. Tentukan $i \in N^+ \cup N^-$ yang memiliki banyak garis penghubung paling sedikit;
4. If $(i > 1)$ {
 Tentukan j yang merupakan tetangga i yang memiliki banyak garis penghubung paling sedikit; }
 else {
 Tentukan j yang merupakan tetangga dari i ; }
6. $M = M \cup \{(i, j)\}$;
7. *Hapus titik i dan j serta semua garis penghubungnya;*
8. *Hitung banyaknya garis di D yang tersisa;* }

Contoh 4.1.4. Perhatikan kembali graf bipartisi $G(A)$ pada Gambar 2.3. Berdasarkan Algoritma 4 maka dapat diperoleh matching maksimum dari graf $G(A)$ dengan langkah-langkah sebagai berikut,

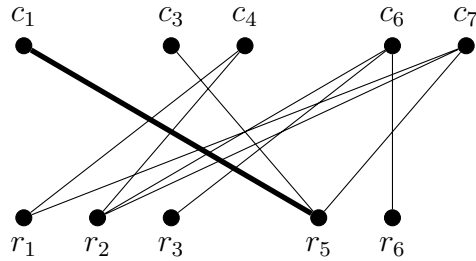
- iterasi 1 : $D \neq \emptyset$, diperoleh $M = \{(c_5, r_7)\}$;



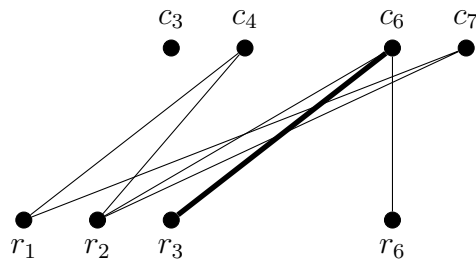
- *iterasi 2* : $D \neq \emptyset$, diperoleh $M = \{(c_5, r_7), (c_2, r_4)\}$;



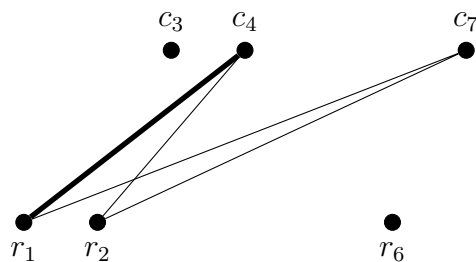
- *iterasi 3* : $D \neq \emptyset$, diperoleh $M = \{(c_5, r_7), (c_2, r_4), (c_1, r_5)\}$;



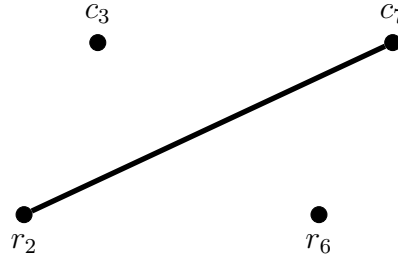
- *iterasi 4* : $D \neq \emptyset$, diperoleh $M = \{(c_5, r_7), (c_2, r_4), (c_1, r_5), (c_6, r_3)\}$;



- *iterasi 5* : $D \neq \emptyset$, diperoleh $M = \{(c_5, r_7), (c_2, r_4), (c_1, r_5), (c_6, r_3), (c_4, r_1)\}$;

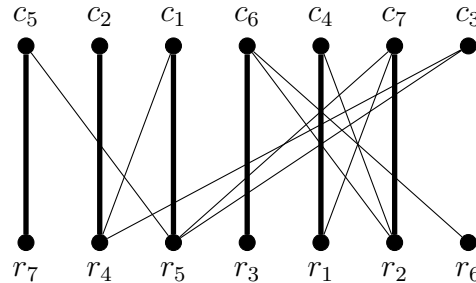


- *iterasi 6* : $D \neq \emptyset$, diperoleh $M = \{(c_5, r_7), (c_2, r_4), (c_1, r_5), (c_6, r_3), (c_4, r_1), (c_7, r_2)\}$;



- *iterasi 7* : $D = \emptyset$, *STOP* ;

Dengan demikian diperoleh himpunan matching maksimum $M = \{(c_5, r_7), (c_2, r_4), (c_1, r_5), (c_6, r_3), (c_4, r_1), (c_7, r_2)\}$ pada graf bipartisi $G(A)$. Kemudian dengan melakukan pengurutan ulang supaya lebih mudah dipahami maka matching M dapat digambarkan sebagai berikut,



Gambar 4.3: Matching maksimum M menggunakan Algoritma 4

Tampak bahwa matching maksimum pada Gambar 4.3 memiliki bentuk yang berbeda dengan matching maksimum pada Gambar 2.4, namun memiliki kardinalitas yang sama yaitu $|M| = 6$.

Algoritma 4 telah diimplementasikan dalam Scilab, sehingga Contoh 4.1.4 dapat dilakukan dalam Scilab sebagai berikut:

```
--> A=[-%inf -%inf -%inf 14 -%inf -%inf 17;-%inf -%inf -%inf 24 -
%inf 26 27;-%inf -%inf -%inf -%inf -%inf 36 -%inf;41 42 43 -%inf -%inf
-%inf -%inf;51 -%inf 53 -%inf 55 -%inf 57;-%inf -%inf -%inf -%inf -%inf 66
```

-%inf;-%inf -%inf -%inf -%inf 75 -%inf -%inf]

A =

‘-Inf	-Inf	-Inf	14.	-Inf	-Inf	17.
-Inf	-Inf	-Inf	24.	-Inf	26.	27.
-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	36.	-Inf
41.	42.	43.	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf
51.	-Inf	53.	-Inf	55.	-Inf	57.
-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	66.	-Inf
-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	75.	-Inf	-Inf

-->[M, MKar]=maximummatching(A)

Mkar =

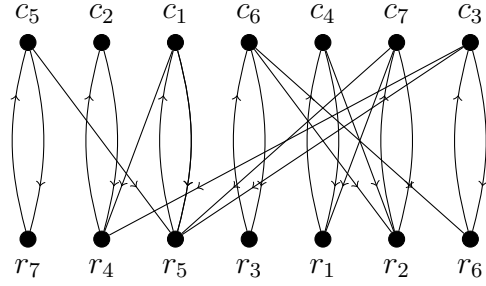
6.

M =

5.	2.	1.	4.	7.	6.
7.	4.	5.	1.	2.	3.

Kemudian berdasarkan Algoritma 3, berikut ini dijelaskan mengenai hasil dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi dengan *matching* maksimum menggunakan Algoritma 4 sebagaimana pada Contoh 4.1.4.

Contoh 4.1.5. Perhatikan kembali *matching* maksimum M pada graf bipartisi $G(A)$ pada Contoh 4.1.4. Berikut ini dijelaskan langkah-langkah dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi pada graf bipartisi $G(A)$ menggunakan Algoritma 3. Langkah pertama: menentukan *matching* maksimum M pada graf bipartisi $G(A)$ sebagaimana pada Contoh 4.1.4 sehingga diperoleh graf bantu $\tilde{G}_M(A) = (N^+ \cup N^-, \tilde{D}^*)$ dengan $\tilde{D}^* = D \cup \{(r_7, c_5), (r_4, c_2), (r_5, c_1), (r_3, c_6), (r_1, c_4), (r_2, c_7)\} \cup \{c_3, r_6\} \cup \{r_6, c_3\}$. Berikut merupakan bentuk graf bantu $\tilde{G}_M(A) = (N^+ \cup N^-, \tilde{D}^*)$,



Gambar 4.4: Graf bantu $\tilde{G}_M(A) = (N^+ \cup N^-, \tilde{D}^*)$.

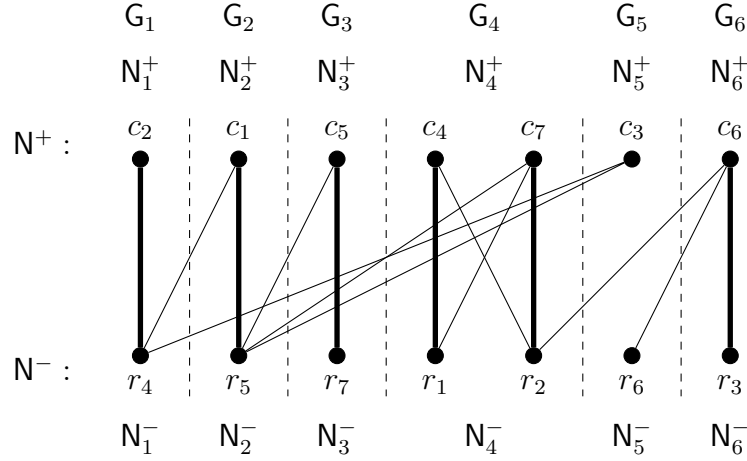
Langkah kedua: diperoleh komponen-komponen strongly connected yaitu $N_1 = \{c_5, r_7\}$, $N_2 = \{c_2, r_4\}$, $N_3 = \{c_1, r_5\}$, $N_4 = \{c_6, r_3\}$, $N_5 = \{c_4, c_7, r_1, r_2\}$, dan $N_6 = \{c_3, r_6\}$ pada graf \tilde{G}_M . Langkah ketiga: apabila dikembalikan kedalam graf bipartisi $G(A)$, berdasarkan komponen-komponen $\{N_k \mid k = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ maka dapat diperoleh komponen-komponen dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi yaitu $\{G_k(A) = (N_k^+, N_k^-; D_k) \mid k = 1, \dots, b\}$ dengan

$$\begin{aligned} \{N_1^+; N_2^+; N_3^+; N_4^+; N_5^+; N_6^+\} &= \{c_5; c_2; c_1; c_6; c_4, c_7; c_3\} \\ \{N_1^-; N_2^-; N_3^-; N_4^-; N_5^-; N_6^-\} &= \{r_7; r_4; r_5; r_3; r_1, r_2; r_6\} \\ \{D_1; D_2; D_3; D_4; D_5; D_6\} &= \{(c_5, r_7); (c_2, r_4); (c_1, r_5); (c_6, r_3); (c_4, r_1), \\ &\quad (c_4, r_2), (c_7, r_1), (c_7, r_2); \emptyset\}. \end{aligned}$$

Langkah keempat: dilakukan pengurutan ulang pada $\{G_k(A) \mid k = 1, \dots, b\}$ berdasarkan urutan parsial \preceq sedemikian hingga dapat diperoleh komponen-komponen dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi pada graf bipartisi $G(A)$ yaitu $\{G_k(A) = (N_k^+, N_k^-; D_k) \mid k = 1, \dots, b\}$ dengan

$$\begin{aligned} \{N_1^+; N_2^+; N_3^+; N_4^+; N_5^+; N_6^+\} &= \{c_2; c_1; c_5; c_4, c_7; c_3; c_6\} \\ \{N_1^-; N_2^-; N_3^-; N_4^-; N_5^-; N_6^-\} &= \{r_4; r_5; r_7; r_1, r_2; r_6; r_3\} \\ \{D_1; D_2; D_3; D_4; D_5; D_6\} &= \{(c_2, r_4); (c_1, r_5); (c_5, r_7); (c_4, r_1), (c_4, r_2), \\ &\quad (c_7, r_1), (c_7, r_2); \emptyset; (c_6, r_3)\}. \end{aligned}$$

sebagaimana ditunjukkan oleh garis vertikal putus-putus pada Gambar 4.5.



Gambar 4.5: Dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi pada $G(A)$

Kemudian berdasarkan penjelasan-penjelasan sebelumnya, partisi dari N^+ yaitu $\{N_k^+ \mid k = 1, 2, \dots, b\} = \{c_2; c_1; c_5; c_4, c_7; c_3; c_6\}$ merepresentasikan pemetaan permutasi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, sehingga diperoleh matriks permutasi kolom Q dengan entri-entri $Q(2, 1) = Q(1, 2) = Q(5, 3) = Q(4, 4) = Q(7, 5) = Q(3, 6) = Q(6, 7) = 0$ dan ε untuk entri yang lainnya. Begitupun juga untuk $\{N_k^- \mid k = 1, 2, \dots, b\} = \{r_4; r_5; r_7; r_1, r_2; r_6; r_3\}$ merepresentasikan pemetaan permutasi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, sehingga diperoleh matriks permutasi baris P dengan entri-entri $P(1, 4) = P(2, 5) = P(3, 7) = P(4, 1) = P(5, 2) = P(6, 6) = P(7, 3) = 0$ dan ε untuk entri yang lainnya. Berikut ini diberikan representasi dari matriks Q dan P ,

$$P = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad Q = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian dapat diperoleh matriks blok segitiga atas \bar{A} yang ditulis seperti halnya berikut supaya mempermudah dalam penjelasan,

$$\bar{A} = P \otimes A \otimes Q =$$

	2	1	5	4	7	3	6
4	$a_{4,2}$	$a_{4,1}$	ε	ε	ε	$a_{4,3}$	ε
5	ε	$a_{5,1}$	$a_{5,5}$	ε	$a_{5,7}$	$a_{5,3}$	ε
7	ε	ε	$a_{7,5}$	ε	ε	ε	ε
1	ε	ε	ε	$a_{1,4}$	$a_{1,7}$	ε	ε
2	ε	ε	ε	$a_{2,4}$	$a_{2,7}$	ε	$a_{2,6}$
6	ε	ε	ε	ε	ε	ε	$a_{6,6}$
3	ε	ε	ε	ε	ε	ε	$a_{3,6}$

Algoritma 3 telah diimplementasikan dalam Scilab, dimana untuk mencari *matching* maksimumnya menggunakan algoritma 4. Sehingga untuk Contoh 4.1.5 dapat dilakukan dalam Scilab sebagai berikut:

```
--> A=[-%inf -%inf -%inf 14 -%inf -%inf 17;-%inf -%inf -%inf 24 -%inf 26 27;-%inf -%inf -%inf -%inf -%inf 36 -%inf;41 42 43 -%inf -%inf -%inf -%inf;51 -%inf 53 -%inf 55 -%inf 57;-%inf -%inf -%inf -%inf -%inf 66 -%inf;-%inf -%inf -%inf -%inf 75 -%inf -%inf]
A =
```

```

-Inf -Inf -Inf 14. -Inf -Inf 17.
-Inf -Inf -Inf 24. -Inf 26. 27.
-Inf -Inf -Inf -Inf -Inf 36. -Inf
41. 42. 43. -Inf -Inf -Inf -Inf
51. -Inf 53. -Inf 55. -Inf 57.
-Inf -Inf -Inf -Inf -Inf 66. -Inf
-Inf -Inf -Inf -Inf 75. -Inf -Inf
```

```
--> [Abar, Mauxiliary, P, Q]=modifiedDM(A)
Q =
```

```

-Inf 0. -Inf -Inf -Inf -Inf -Inf
0. -Inf -Inf -Inf -Inf -Inf -Inf
-Inf -Inf -Inf -Inf -Inf 0. -Inf
-Inf -Inf -Inf 0. -Inf -Inf -Inf
-Inf -Inf 0. -Inf -Inf -Inf -Inf
-Inf -Inf -Inf -Inf -Inf -Inf 0.
-Inf -Inf -Inf -Inf 0. -Inf -Inf
```


P =

-Inf	-Inf	-Inf	0.	-Inf	-Inf	-Inf
-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	0.	-Inf	-Inf
-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	0.
0.	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf
-Inf	0.	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf
-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	0.	-Inf
-Inf	-Inf	0.	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf

Mauxiliary =

2.	1.	5.	4.	7.	3.	6.
4.	5.	7.	1.	2.	6.	3.

Abar =

42.	41.	-Inf	-Inf	-Inf	43.	-Inf
-Inf	51.	55.	-Inf	57.	53.	-Inf
-Inf	-Inf	75.	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf
-Inf	-Inf	-Inf	14.	17.	-Inf	-Inf
-Inf	-Inf	-Inf	24.	27.	-Inf	26.
-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	66.
-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	36.

Hasil modifikasi dari algoritma dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi ini juga memperlihatkan struktur dari graf bipartisi yang memperhatikan *matching* maksimum dan *cover* minimum yang dapat diturunkan dari Teorema 2.2.14.

Teorema 4.1.6. *Diberikan graf bipartisi $G = (N^+, N^-; D)$. Misalkan $G_k = (N_k^+, N_k^-; D_k)$ ($k = 1, \dots, b$) sebagai komponen-komponen dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi pada graf bipartisi G .*

- 1 Untuk $D_k \neq \emptyset$, $k \in \underline{b} : v(G_k) = |N_k^+| = |N_k^-|$, $\mathcal{C}(G_k) = \{(N_k^+, \emptyset), (\emptyset, N_k^-)\}$, dan setiap $a \in D_k$ merupakan admissible di G_k . Kemudian untuk $k = 1, b$ maka $D_k \neq \emptyset$.
Untuk $D_k = \emptyset$, $k \in \underline{b} : v(G_k) = 0$, $\mathcal{C}(G_k) = \{(\emptyset, \emptyset)\}$.

- 2 Urutan parsial \preceq pada komponen-komponen G_k merepresentasikan

eksistensi dari $D_{k,l}$ yaitu

jika $G_k \preceq G_l$ maka $D_{kl} = \emptyset$ ($1 \leq k, l \leq b$);

jika $G_k \prec G_l$ maka $D_{kl} \neq \emptyset$ ($1 \leq k, l \leq b$).

3 $M(\subseteq D)$ merupakan matching maksimum di G jika dan hanya jika $M \subseteq \bigcup_{k=1}^b D_k$ dan $M \cap D_k$ merupakan matching maksimum di G_k untuk $k = 1, \dots, b$.

Bukti. Beberapa pernyataan dalam teorema diatas telah dibuktikan dalam Teorema 2.2.14. Berikut ini dibuktikan untuk $k = 1, b$ maka $D_k \neq \emptyset$: sebagai akibat dari Teorema 2.2.6 maka terdapat garis yang menghubungkan suatu titik di S^+ ke suatu titik di $\partial^- M$ ataupun terdapat garis yang menghubungkan suatu titik di $\partial^+ M$ ke suatu titik di S^- . Sebagai akibat dari definisi \preceq pada subgraf $\{G_k \mid k = \}$, maka $D_k \neq \emptyset$ untuk $k = 1, b$. Kemudian untuk $v(G_k) = 0$, $\mathcal{C}(G_k) = \{(\emptyset, \emptyset)\}$ sudah cukup jelas karena untuk subgraf G_k tidak memiliki garis penghubung. \square

Dalam hal ini, blok diagonal dari matriks \bar{A} yang diperoleh dari dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi merupakan matriks tak-tereduksi sebagaimana dijelaskan dalam teorema berikut,

Teorema 4.1.7. Diberikan matriks blok segitiga atas \bar{A} yang diperoleh dari dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi. Misalkan $A_{k,k}$ ($k = 1, 2, \dots, b$) merupakan blok diagonal dari matriks \bar{A} maka $A_{k,k}$ merupakan matriks tak-tereduksi.

Bukti. Karena subgraf-subgraf G_k ($k = 1, \dots, b$) hasil dekomposisi Dulmage-Mendelsohn merupakan subgraf-subgraf yang tidak dapat didekomposisi lagi, maka akibatnya matriks representasi dari subgraf G_k ($k = 1, \dots, b$) yaitu $A_{k,k}$ merupakan matriks persegi yang tidak dapat didekomposisi lagi menjadi matriks blok segitiga atas, yang artinya matriks persegi $A_{k,k}$ merupakan matriks persegi tak-tereduksi. \square

Perhatikan kembali sistem event diskrit yang berbentuk $\mathbf{x}(k+1) = A \otimes \mathbf{x}(k)$ dengan A merupakan matriks persegi reguler. Apabila dilakukan dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi pada matriks A sedemikian hingga diperoleh matriks blok segitiga atas $\bar{A} = P \otimes A \otimes Q$, maka sistem persamaan yang dibangun dari matriks A dengan melakukan transformasi

keadaan sistem $\tilde{\mathbf{x}}(k) = P \otimes \mathbf{x}(k)$ dan karena $Q \otimes Q^\top = E$ dengan E merupakan matriks identitas atas aljabar max-plus didapat,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}(k+1) &= P \otimes \mathbf{x}(k+1) \\ &= P \otimes A \otimes \mathbf{x}(k) \\ &= P \otimes A \otimes Q \otimes Q^\top \otimes \mathbf{x}(k) \\ &= \bar{A} \otimes (Q^\top \otimes \mathbf{x}(k)).\end{aligned}$$

Bila $Q^\top = P$ maka didapat $\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{A} \otimes \tilde{\mathbf{x}}(k)$ dengan transformasi keadaan sistem $\tilde{\mathbf{x}}(k) = P \otimes \mathbf{x}(k)$ dan $\bar{A} = P \otimes A \otimes P^\top$. Berikut ini diberikan beberapa proposisi dan teorema terkait hubungan antara $\bar{A} = P \otimes A \otimes Q$, $Q = P^\top$ dengan elemen-elemen taknol pada diagonal utama matriks A .

Proposisi 4.1.8. *Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ dengan representasi graf bipartisinya yaitu $G(A)$. Misalkan M merupakan matching maksimum di $G(A)$ maka $|M| \geq |p|$ dengan $p = \{[A]_{i,i} \in \mathbb{R} \mid i \in \underline{n}\}$.*

Bukti. Berikut ini dibuktikan bahwa untuk setiap *matching* M di $G(A) = (N^+, N^-; D)$ yang memenuhi $|M| < |p|$ maka M bukan *matching* maksimum. Ambil *matching* $M' = \{(c_i, r_i) \in D \mid c_i \in N^+, r_i \in N^-, i \in \underline{n}\}$ di G sedemikian hingga $|M'| = |p|$. Karena $|M| < |p|$ maka $|M| < |M'|$ yang artinya M bukan *matching* maksimum di G . \square

Proposisi 4.1.9. *Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ dengan representasi graf bipartisinya yaitu $G(A) = (N^+, N^-; D)$. Hasil dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi pada matriks A adalah $\bar{A} = P \otimes A \otimes P^\top$ jika dan hanya jika $M = \{(c_i, r_i) \in D \mid c_i \in N^+, r_i \in N^-, i \in \underline{n}\}$ merupakan matching maksimum di $G(A)$.*

Bukti. (\Rightarrow) Karena \bar{A} merupakan hasil dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi pada matriks A , maka dapat ditulis $\bar{A} = P \otimes A \otimes Q$ dimana P dan Q merupakan matriks permutasi baris dan kolom. Berdasarkan penjelasan mengenai matriks permutasi pada subbab 2.2, misalkan pemetaan permutasi representasi dari matriks P yaitu $\pi_P : \underline{n} \rightarrow \underline{n}$ sedemikian hingga dapat diperoleh entri-entri dari matriks P yaitu

$$[P]_{i,j} \begin{cases} 1 & , j = \pi_P(i) \\ 0 & , \text{yang lainnya} \end{cases} \quad \text{atau} \quad [P^\top]_{i,j} \begin{cases} 1 & , i = \pi_P(j) \\ 0 & , i, j \text{ yang lainnya} \end{cases},$$

sedangkan pemetaan permutasi representasi dari matriks Q yaitu $\pi_Q : \underline{n} \rightarrow \underline{n}$ sedemikian hingga dapat diperoleh entri-entri dari matriks Q yaitu

$$[Q]_{i,j} \begin{cases} 1 & , i = \pi_Q(j) \\ 0 & , i, j \text{ yang lainnya} \end{cases}.$$

Untuk matriks P dan Q yang memenuhi $Q = P^\top$ maka haruslah $\pi_P(j) = \pi_Q(j)$ untuk setiap $j \in \underline{n}$, namun dalam hal ini P dan Q masing-masing belum tentu matriks singular sebab masing-masing didefinisikan berdasarkan matriks permutasi baris dan kolom. Kemudian berdasarkan Algoritma 3 dapat diperoleh *matching* maksimum $M = \{(c_i, r_i) \in D \mid c_i \in N^+, r_i \in N^-, i \in \underline{n}\}$ di $G(A)$. (\Leftarrow) Berdasarkan Algoritma 3, untuk *matching* maksimum $M = \{(c_i, r_i) \mid i \in \underline{n}\}$ di $G(A)$ maka masing-masing matriks permutasi baris P dan matriks permutasi kolom Q memiliki pemetaan permutasi yang sama, sehingga berlaku $Q = P^\top$. \square

Kemudian berikut ini diberikan teorema yang menjelaskan mengenai kondisi dari matriks persegi A yang memiliki bentuk matriks blok segitiga atas hasil dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi yaitu $\bar{A} = PAQ$ dengan $Q = P^\top$.

Teorema 4.1.10. *Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ dengan representasi graf bipartisinya yaitu $G(A)$. Hasil dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi pada matriks A adalah $\bar{A} = P \otimes A \otimes P^\top$ jika dan hanya jika terdapat *matching* maksimum M di G yang memenuhi $|M| = |p|$ dengan $p = \{[A]_{i,i} \in \mathbb{R} \mid i \in \underline{n}\}$.*

Bukti. (\Rightarrow) Berdasarkan Proposisi 4.1.9, untuk $\bar{A} = P \otimes A \otimes Q$ dengan $Q = P^\top$ maka dapat diperoleh *matching* maksimum $M = \{(c_i, r_i) \in D \mid c_i \in N^+, r_i \in N^-, i \in \underline{n}\}$ di $G = (N^+, N^-; D)$. Karena M merupakan *matching* maksimum maka berdasarkan Proposisi 4.1.8 diperoleh $|M| = p$. (\Leftarrow) Karena $|M| = |p|$ maka dapat diambil *matching* maksimum $M = \{(c_i, r_i) \mid i \in \underline{n}\}$. Berdasarkan Proposisi 4.1.9 untuk *matching* maksimum $M = \{(c_i, r_i) \mid i \in \underline{n}\}$ maka dapat diperoleh $\bar{A} = P \otimes A \otimes Q$ dengan $Q = P^\top$. \square

Contoh 4.1.11. *Perhatikan kembali matriks A pada Contoh 4.1.1, berdasarkan Teorema 4.1.10 maka matriks A memiliki bentuk matriks blok segitiga atas $\bar{A} = P \otimes A \otimes Q$ dimana $Q \neq P^\top$ sebagaimana pada Contoh 4.1.3 dan Contoh 4.1.5. Hal ini dikarenakan $p = \{a_{5,5}, a_{6,6}\}$ dengan $|p| = 2$ dan $|M| = 6$ sedemikian hingga $|p| \neq |M|$. Berikut diberikan matriks*

persegi B atas aljabar max-plus, yaitu

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 7 & 6 & 6 & \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 9 & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 7 & \varepsilon & 5 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & 5 & \varepsilon \\ 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Matriks B memiliki himpunan $p = \{3, 6, 9, 7, 5, 2\}$ dengan $|p| = 6$. Kemudian berdasarkan Algoritma 4 maka dapat diperoleh matching maksimum dari graf bipartisi $G(B)$ yaitu $M = \{(c_1, r_1), (c_2, r_3), (c_3, r_6), (c_4, r_4), (c_5, r_5), (c_7, r_2)\}$ dengan $|M| = 6$. Tampak bahwa $|p| = |M| = 6$, maka berdasarkan Proposisi 4.1.9 dan Teorema 4.1.10 dapat diperoleh $M = \{(1, 1), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7)\}$ sehingga dengan menggunakan Algoritma 3 dapat diperoleh matriks permutasi baris P dan kolom Q yang memenuhi $Q = P^\top$ sebagai berikut

$$P = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad Q = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga dapat diperoleh matriks blok segitiga atas $\bar{B} = P \otimes B \otimes Q$ yaitu,

		4	5	3	6	2	1	7
4	9	1	ε	ε	ε	ε	ε	ε
5	ε	7	ε	ε	ε	5	ε	
3	ε	ε	6	3	6	ε	7	
6	ε	ε	0	5	ε	ε	ε	
2	ε	ε	ε	ε	ε	0	4	
1	ε	ε	ε	ε	ε	3	3	
7	ε	ε	ε	ε	ε	5	2	

Teorema 4.1.10 telah diimplementasikan dalam Scilab, sehingga untuk Contoh 4.1.11 dapat dilakukan dalam scilab sebagai berikut,

```
--> B=[3 -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf 3;4 -%inf -%inf -%inf -%inf
-%inf 0;7 6 6 -%inf -%inf 3 -%inf;-%inf -%inf -%inf 9 1 -%inf -%inf;-%inf -%inf
-%inf -%inf 7 -%inf 5;-%inf -%inf 0 -%inf -%inf 5 -%inf;5 -%inf -%inf -%inf
-%inf -%inf 2]
```

B =

```
3.  -Inf  -Inf  -Inf  -Inf  -Inf  3.
4.  -Inf  -Inf  -Inf  -Inf  -Inf  0.
7.   6.   6.  -Inf  -Inf  3.  -Inf
-Inf -Inf -Inf  9.   1.  -Inf -Inf
-Inf -Inf -Inf -Inf  7.  -Inf  5.
-Inf -Inf  0.  -Inf -Inf  5.  -Inf
5.  -Inf  -Inf  -Inf  -Inf  -Inf  2.
```

```
-->[Bbar, Mauxiliary, P, Q]=modifiedDM(B)
```

Q =

```
-Inf -Inf -Inf -Inf -Inf  0.  -Inf
-Inf -Inf -Inf -Inf  0.  -Inf -Inf
-Inf -Inf  0.  -Inf -Inf -Inf -Inf
0.  -Inf -Inf -Inf -Inf -Inf -Inf
-Inf  0.  -Inf -Inf -Inf -Inf -Inf
-Inf -Inf -Inf  0.  -Inf -Inf -Inf
-Inf -Inf -Inf -Inf -Inf -Inf  0.
```

P =

-Inf	-Inf	-Inf	0.	-Inf	-Inf	-Inf
-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	0.	-Inf	-Inf
-Inf	-Inf	0.	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf
-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	0.	-Inf
-Inf	0.	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf
0.	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf
-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	0.

Mauxiliary =

4.	5.	3.	6.	2.	1.	7.
4.	5.	3.	6.	2.	1.	7.

Abar =

9.	1.	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf
-Inf	7.	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	5.
-Inf	-Inf	6.	3.	6.	7.	-Inf
-Inf	-Inf	0.	5.	-Inf	-Inf	-Inf
-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	4.	0.
-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	3.	3.
-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	-Inf	5.	2.

4.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen pada Matriks Tereduksi atas Aljabar Max-Plus

Sebagaimana yang telah dijelaskan dalam Bab 2, suatu matriks persegi reguler A disebut sebagai matriks tereduksi atau tak-tereduksi dapat ditentukan berdasarkan ada tidaknya matriks permutasi P , dimana dari matriks P dapat diperoleh bentuk matriks blok segitiga atas dari matriks tereduksi yaitu $\bar{A} = P \otimes A \otimes P^\top$. Matriks P dapat diperoleh menggunakan dekomposisi *strongly connected* pada graf representasinya. Sehingga dalam teori graf, matriks persegi reguler disebut matriks tereduksi atau tak-tereduksi dapat ditentukan berdasarkan *strongly connected* tidaknya graf representasinya. Bagaimanapun juga, untuk menentukan ada tidaknya matriks P ataupun menentukan *strongly connected* tidaknya graf representasi dari matriks A cukup sulit untuk ukuran matriks A yang cukup besar. Berikut ini diberikan teorema yang menjelaskan mengenai definisi matriks persegi reguler

tereduksi dan matriks persegi reguler tak-tereduksi berdasarkan entri-entrinya. Teorema ini terinspirasi dari hubungan entri-entri matriks A dengan bobot dari *path* graf representasi sebagaimana dalam Teorema 2.4.2.

Teorema 4.2.1. *Diberikan matriks persegi reguler $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ dan didefinisikan matriks $A^+ \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{k=1}^n A^{\otimes k}$. Matriks A merupakan matriks tereduksi jika dan hanya jika $[A^+]_{i,j} = \varepsilon$ untuk suatu $i, j \in \underline{n}$. Sedangkan matriks A merupakan matriks tak-tereduksi jika dan hanya jika $[A^+]_{i,j} \neq \varepsilon$ untuk setiap $i, j \in \underline{n}$.*

Bukti. Berikut ini dibuktikan bahwa Matriks A merupakan matriks tereduksi jika dan hanya jika $[A^+]_{i,j} = \varepsilon$ untuk suatu $i, j \in \underline{n}$. (\Rightarrow) Matriks A merupakan matriks tereduksi, artinya graf representasi dari matriks A tidak *strongly connected* yaitu $j \not\stackrel{*}{\rightarrow} i$ untuk suatu $i, j \in \mathcal{N}$. Berdasarkan teorema 2.4.2 maka $[A^{\otimes k}]_{i,j} = \varepsilon$ untuk setiap $k \in \underline{n}$ dan suatu $i, j \in \underline{n}$ sedemikian hingga $[A^+]_{i,j} = \max_{k \in \underline{n}} \{[A^{\otimes k}]_{i,j}\} = \varepsilon$. (\Leftarrow) Jika $[A^+]_{i,j} = \max_{k \in \underline{n}} \{[A^{\otimes k}]_{i,j}\} = \varepsilon$ untuk suatu $i, j \in \underline{n}$ maka $[A^{\otimes k}]_{i,j} \leq \varepsilon$ untuk setiap $k \in \underline{n}$. Karena $[A^{\otimes k}]_{i,j} \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ maka $[A^{\otimes k}]_{i,j} = \varepsilon$ yang artinya $j \not\stackrel{*}{\rightarrow} i$ untuk suatu $i, j \in \mathcal{N}$. Dalam hal yang demikian graf representasi dari matriks A tidak *strongly connected* yang artinya matriks A merupakan matriks tereduksi.

Selanjutnya, berikut ini dibuktikan bahwa matriks A merupakan matriks tak-tereduksi jika dan hanya jika $[A^+]_{i,j} \neq \varepsilon$ untuk setiap $i, j \in \underline{n}$. (\Rightarrow) Matriks A merupakan matriks tak-tereduksi, artinya graf representasi dari matriks A *strongly connected* yaitu $j \sim i$ untuk setiap $i, j \in \mathcal{N}$. Berdasarkan teorema 2.4.2 maka $[A^{\otimes k}]_{i,j} \neq \varepsilon$ untuk suatu $k \in \underline{n}$ dan setiap $i, j \in \underline{n}$ sedemikian hingga $[A^+]_{i,j} = \max_{k \in \underline{n}} \{[A^{\otimes k}]_{i,j}\} \neq \varepsilon$. (\Leftarrow) Jika $[A^+]_{i,j} = \max_{k \in \underline{n}} \{[A^{\otimes k}]_{i,j}\} \neq \varepsilon$ untuk setiap $i, j \in \underline{n}$ maka $[A^{\otimes k}]_{i,j} \neq \varepsilon$ untuk suatu $k \in \underline{n}$ yang artinya $j \stackrel{*}{\rightarrow} i$ untuk setiap $i, j \in \mathcal{N}$, dengan kata lain $j \sim i$ untuk setiap $i, j \in \mathcal{N}$. Dalam hal yang demikian graf representasi dari matriks A *strongly connected* yang artinya matriks A tak-tereduksi. \square

Contoh 4.2.2. Perhatikan kembali matriks B pada Contoh 4.1.11. Dengan menggunakan toolbox MAXPLUS pada scilab dapat diperoleh hasil matriks B^+ yaitu

$$B^+ = B \oplus B^{\otimes 2} \oplus B^{\otimes 3} \oplus B^{\otimes 4} \oplus B^{\otimes 5} \oplus B^{\otimes 6} \oplus B^{\otimes 7}$$

$$= \begin{bmatrix} 27 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 27 \\ 28 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 26 \\ 43 & 42 & 42 & \varepsilon & \varepsilon & 39 & 40 \\ 47 & \varepsilon & \varepsilon & 63 & 55 & \varepsilon & 51 \\ 45 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 49 & \varepsilon & 47 \\ 37 & 36 & 36 & \varepsilon & \varepsilon & 35 & 34 \\ 29 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 27 \end{bmatrix}.$$

Tampak bahwa $[A^+]_{1,2} = [A^+]_{1,3} = [A^+]_{1,4} = [A^+]_{1,5} = [A^+]_{1,6} = [A^+]_{2,2} = [A^+]_{2,3} = [A^+]_{2,4} = [A^+]_{2,5} = [A^+]_{2,6} = [A^+]_{3,4} = [A^+]_{3,5} = [A^+]_{4,2} = [A^+]_{4,3} = [A^+]_{4,6} = [A^+]_{5,2} = [A^+]_{5,3} = [A^+]_{5,4} = [A^+]_{5,6} = [A^+]_{6,4} = [A^+]_{6,5} = [A^+]_{7,2} = [A^+]_{7,3} = [A^+]_{7,4} = [A^+]_{7,5} = [A^+]_{7,6} = \varepsilon$. Oleh sebab itu, berdasarkan Teorema 4.2.1 maka matriks A merupakan matriks tereduksi.

Sebagaimana yang telah dibahas dalam Bab 2, bahwasannya nilai eigen sangat erat kaitannya dengan vektor waktu-sikel sistemnya. Keujudan vektor waktu-sikel dari matriks tereduksi dimotivasi dari hal sederhana yang dijelaskan sebagai berikut. Tinjau sistem event diskrit berbentuk $\mathbf{x}(k+1) = A \otimes \mathbf{x}(k)$ dengan matriks A diberikan sebagai berikut,

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ \varepsilon & a_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Untuk vektor waktu awal $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ maka dapat diperoleh vektor waktu sikel η dari sistem diatas dengan membaginya kedalam beberapa kasus, yaitu

Kasus 1 : $a_{1,1} \geq a_{2,2}$ dan $a_{1,2} \neq \varepsilon$.

- $\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} \max\{a_{1,1}, a_{1,2}\} \\ \max\{a_{2,2}\} \end{bmatrix}$
- $\mathbf{x}(2) = \begin{bmatrix} \max\{2a_{1,1}, a_{1,2} + a_{1,1}, a_{1,2} + a_{2,2}\} \\ \max\{2a_{2,2}\} \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \max\{2a_{1,1}, a_{1,2} + a_{1,1}\} \\ \max\{2a_{2,2}\} \end{bmatrix} \\
\bullet \quad \mathbf{x}(3) &= \begin{bmatrix} \max\{3a_{1,1}, a_{1,2} + 2a_{1,1}, a_{1,2} + 2a_{2,2}\} \\ \max\{3a_{2,2}\} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max\{3a_{1,1}, a_{1,2} + 2a_{1,1}\} \\ \max\{3a_{2,2}\} \end{bmatrix} \\
&\vdots \\
\bullet \quad \mathbf{x}(k) &= \begin{bmatrix} \max\{ka_{1,1}, a_{1,2} + (k-1)a_{1,1}\} \\ \max\{ka_{2,2}\} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Dengan demikian dapat diperoleh vektor waktu-sikelnnya yaitu

$$\eta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{x}(k)}{k} = \begin{bmatrix} \max\{a_{1,1}, a_{1,1}\} \\ \max\{a_{2,2}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,2} \end{bmatrix}$$

□

Kasus 2 : $a_{1,1} < a_{2,2}$ dan $a_{1,2} \neq \varepsilon$.

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \mathbf{x}(1) &= \begin{bmatrix} \max\{a_{1,1}, a_{1,2}\} \\ \max\{a_{2,2}\} \end{bmatrix} \\
\bullet \quad \mathbf{x}(2) &= \begin{bmatrix} \max\{2a_{1,1}, a_{1,2} + a_{1,1}, a_{1,2} + a_{2,2}\} \\ \max\{2a_{2,2}\} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max\{2a_{1,1}, a_{1,2} + a_{2,2}\} \\ \max\{2a_{2,2}\} \end{bmatrix} \\
\bullet \quad \mathbf{x}(3) &= \begin{bmatrix} \max\{3a_{1,1}, a_{1,1} + a_{1,2} + a_{2,2}, a_{1,2} + 2a_{2,2}\} \\ \max\{3a_{2,2}\} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max\{3a_{1,1}, a_{1,2} + 2a_{2,2}\} \\ \max\{3a_{2,2}\} \end{bmatrix} \\
&\vdots \\
\bullet \quad \mathbf{x}(k) &= \begin{bmatrix} \max\{ka_{1,1}, a_{1,2} + (k-1)a_{2,2}\} \\ \max\{ka_{2,2}\} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Dengan demikian dapat diperoleh vektor waktu-sikelnnya yaitu

$$\eta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{x}(k)}{k} = \begin{bmatrix} \max\{a_{1,1}, a_{2,2}\} \\ \max\{a_{2,2}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{2,2} \\ a_{2,2} \end{bmatrix}$$

□

Kasus 3 : $a_{1,2} = \varepsilon$.

$$\begin{aligned}
\bullet \mathbf{x}(1) &= \begin{bmatrix} \max\{a_{1,1}, a_{1,2}\} \\ \max\{a_{2,2}\} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max\{a_{1,1}\} \\ \max\{a_{2,2}\} \end{bmatrix} \\
\bullet \mathbf{x}(2) &= \begin{bmatrix} \max\{2a_{1,1}, a_{1,2} + a_{2,2}\} \\ \max\{2a_{2,2}\} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max\{2a_{1,1}\} \\ \max\{2a_{2,2}\} \end{bmatrix} \\
\bullet \mathbf{x}(3) &= \begin{bmatrix} \max\{3a_{1,1}, a_{1,2} + 2a_{2,2}\} \\ \max\{3a_{2,2}\} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \max\{3a_{1,1}\} \\ \max\{3a_{2,2}\} \end{bmatrix} \\
&\vdots \\
\bullet \mathbf{x}(k) &= \begin{bmatrix} \max\{ka_{1,1}\} \\ \max\{ka_{2,2}\} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Dengan demikian dapat diperoleh vektor waktu-sikelnnya yaitu

$$\eta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{x}(k)}{k} = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,2} \end{bmatrix}.$$

□

Dari beberapa kasus yang telah dibahas, maka dapat disimpulkan bahwa vektor waktu-sikel dari sistem tersebut yaitu

$$\eta = \begin{cases} \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,2} \end{bmatrix}, & a_{1,1} \geq a_{2,2} \\ \begin{bmatrix} a_{2,2} \\ a_{2,2} \end{bmatrix}, & a_{1,1} < a_{2,2}, a_{1,2} \neq \varepsilon \end{cases}$$

Matriks A diatas merupakan bentuk paling sederhana dari matriks blok segitiga atas. Selanjutnya dijelaskan analisis dari vektor waktu-sikel matriks

blok segitiga atas \bar{A} yang lebih umum dengan bentuk sebagai berikut,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,b} \\ \epsilon & A_{2,2} & \cdots & A_{2,b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon & \epsilon & \cdots & A_{b,b} \end{bmatrix}$$

dengan $A_{i,i}$, $i \in \underline{b}$ merupakan matriks persegi tak-tereduksi. Dalam hal ini $[\bar{A}]_{i,j} \stackrel{def}{=} A_{i,j}$ untuk $i, j \in \underline{b}$. Selanjutnya diberikan lemma yang menjelaskan terkait entri matriks \bar{A} pada baris ke- i dan kolom ke- j dinotasikan $[\bar{A}^{\otimes k}]_{i,j}$ sebagai berikut

Lema 4.2.3. *Diberikan matriks blok segitiga atas \bar{A} . Untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ dan $i > j$, $i, j \in \underline{b}$ maka $[\bar{A}^{\otimes k}]_{i,j} = \epsilon$.*

Bukti. Berdasarkan Persamaan 2.18, maka untuk $i, j \in \underline{b}$ dapat diperoleh

$$[\bar{A}^{\otimes k}]_{i,j} = \bigoplus_{1 \leq r_1, \dots, r_{k-1} \leq b} \{A_{i,r_{k-1}} \otimes \cdots \otimes A_{r_2,r_1} \otimes A_{r_1,j}\}.$$

Perhatikan pola barisan $(i, r_{k-1}), (r_{k-1}, r_{k-2}), \dots, (r_2, r_1), (r_1, j)$ dengan $i, j, r_1, \dots, r_{k-1} \in \underline{n}$. Untuk $i > j$ dapat dibagi menjadi dua kasus yaitu

Kasus 1. $i < r_{k-1}$:

Untuk $i < r_{k-1}$ maka setidaknya terdapat $r_{k-l} > r_{k-l-1}$ untuk $l \in \underline{k-1}$, sebab jika tidak ada satupun $r_{k-l} > r_{k-l-1}$ maka akan berakibat $i < j$ dimana hal ini kontradiksi dengan $i > j$. Karena $r_{k-l} > r_{k-l-1}$ maka $A_{r_{k-l}, r_{k-l-1}} = \epsilon$ sehingga $[\bar{A}^{\otimes k}]_{i,j} = \epsilon$.

Kasus 2. $r_{k-1} < i$:

Jelas bahwa jika $r_{k-1} < i$ maka $A_{i, r_{k-1}} = \epsilon$ sehingga $[\bar{A}^{\otimes k}]_{i,j} = \epsilon$. \square

Lema 4.2.4. *Diberikan \bar{A} sebagai matriks blok segitiga atas. Untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ dan $i \leq j$ maka*

$$[\bar{A}^{\otimes k}]_{i,j} = \bigoplus_{i \leq r_{k-1} \leq \dots \leq r_1 \leq j} \{A_{i,r_{k-1}} \otimes \cdots \otimes A_{r_2,r_1} \otimes A_{r_1,j}\}$$

Bukti. Berdasarkan Persamaan 2.18, maka untuk $i, j \in \underline{b}$ dapat diperoleh

$$[\bar{A}^{\otimes k}]_{i,j} = \bigoplus_{1 \leq r_1, \dots, r_{k-1} \leq b} \{A_{i,r_{k-1}} \otimes \cdots \otimes A_{r_2,r_1} \otimes A_{r_1,j}\}.$$

Sebagai akibat dari Lemma 4.2.3 maka dapat diperoleh

$$[\bar{A}^{\otimes^k}]_{i,j} = \bigoplus_{i \leq r_{k-1} \leq \dots \leq r_1 \leq j} \{A_{i,r_{k-1}} \otimes \dots \otimes A_{r_2,r_1} \otimes A_{r_1,j}\}$$

□

Selanjutnya untuk sistem event diskrit berbentuk $\mathbf{x}(k) = \bar{A}^{\otimes^k} \otimes \mathbf{x}(0)$ dengan $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(0) & \mathbf{x}_2(0) & \dots & \mathbf{x}_b(0) \end{bmatrix}^\top$, berdasarkan Lemma 4.2.4 dapat diperoleh $[\mathbf{x}(k)]_i$ untuk $i \in \underline{b}$ yaitu

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}(k)]_i &= [A^{\otimes^k} \otimes \mathbf{x}(0)]_i \\ &= \bigoplus_{r_0=1}^b \left\{ \bigoplus_{i \leq r_{k-1} \leq \dots \leq r_1 \leq r_0} \{A_{i,r_{k-1}} \otimes \dots \otimes A_{r_2,r_1} \otimes A_{r_1,r_0} \otimes \mathbf{x}_{r_0}(0)\} \right\} \\ &= \bigoplus_{i \leq r_{k-1} \leq \dots \leq r_1 \leq r_0} \{A_{i,r_{k-1}} \otimes \dots \otimes A_{r_2,r_1} \otimes A_{r_1,r_0} \otimes \mathbf{x}_{r_0}(0)\}. \end{aligned}$$

Dengan demikian vektor waktu-sikel dari sistem tersebut yaitu $\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_b \end{bmatrix}^\top$ dapat diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned} \eta_i &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{A^{\otimes^k} \otimes \mathbf{x}(0)}{k} \right]_i \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \bigoplus_{i \leq r_{k-1} \leq \dots \leq r_1 \leq r_0} \frac{A_{i,r_{k-1}} \otimes \dots \otimes A_{r_2,r_1} \otimes A_{r_1,r_0} \otimes \mathbf{x}_{r_0}(0)}{k} \right\}. \quad (4.1) \end{aligned}$$

Karena A_{ii} , $i \in \underline{b}$ berukuran $n_i \times n_i$ merupakan matriks tak-tereduksi, maka berdasarkan Teorema 2.4.10 dapat diperoleh vektor waktu-sikel dari masing-masing matriks $A_{i,i}$, $i \in \underline{b}$ yaitu

$$\begin{aligned} \lambda(A_{i,i}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A_{i,i} \otimes \mathbf{x}_i(0)}{k}, \quad i \in \underline{b} \\ &= \bigoplus_{k=1}^{n_i} \frac{\text{trace}(A^{\otimes^k})}{k}, \quad \text{dengan } \text{trace}(A) = \bigoplus_{i=1}^{n_i} a_{i,i}. \end{aligned}$$

Kemudian perhatikan pola barisan (i, r_{k-1}) , (r_{k-1}, r_{k-2}) , \dots , (r_1, r_0) dengan $i \leq r_{k-1} \leq \dots \leq r_1 \leq r_0$ maka dapat dianalisis terkait hal-hal berikut,

- I. Matriks $A_{r_l, r_{l-1}}$, $l \in \underline{k}$ hanya muncul sekali dalam rangkaian perkalian $A_{i, r_{k-1}} \otimes \dots \otimes A_{r_2, r_1} \otimes A_{r_1, r_0} \otimes \mathbf{x}_{r_0}(0)$, hal ini berdasarkan Teorema 4.2.4

haruslah $r_l \leq r_{l-1}$ sehingga jika terdapat lebih dari satu kemunculan $A_{r_l, r_{l-1}}$ berakibat terdapat $r_m > r_{m-1}$ yang artinya $A_{r_m, r_{m-1}} = \epsilon$.

II. Matriks $A_{i,i}$, $i = \underline{b}$ dapat muncul beberapa kali dalam rangkaian perkalian $A_{i, r_{k-1}} \otimes \cdots \otimes A_{r_2, r_1} \otimes A_{r_1, r_0} \otimes \mathbf{x}_{r_0}(0)$.

III. Perhatikan kembali Persamaan 4.1, nilai η_i dipengaruhi oleh serangkaian $A_{l,l}$, $l = \underline{b}$ dimana kemunculan $A_{l,l}$ bergantung dengan eksistensi $A_{i,l}$.

Dari serangkaian analisis diatas yaitu I-III maka dapat diperoleh Suatu algoritma untuk menentukan vektor waktu-sikel dari matriks tereduksi sebagai berikut,

Algoritma 5: Menentukan vektor waktu-sikel matriks blok segitiga atas \bar{A}

1. Tentukan vektor waktu-sikel dari blok diagonal matriks \bar{A} , misalkan $\bar{\eta}_i$ dengan semua entrinya yaitu $\bar{\eta}_i = \lambda(A_{i,i})$;
2. for $i = 1 : b - 1$ do {
3. for $j = i : b - 1$ do {
4. if $A_{b-j, b-i+1} \neq \epsilon$ and $\bar{\eta}_{b-i+1} > \bar{\eta}_{b-j}$ do {
- $\bar{\eta}_{b-j} = \bar{\eta}_{b-i+1}$; }}}

□

Dalam hal ini setiap entri-entri vektor waktu-sikel $\bar{\eta}$ yang berbeda merupakan calon nilai eigen (λ) dari matriks blok segitiga atas \bar{A} . Kemudian untuk masing-masing vektor eigennya dapat diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan $\bar{A} \otimes \bar{\mathbf{v}} = \lambda \otimes \bar{\mathbf{v}}$. Kemudian untuk mengembalikan vektor eigen $\bar{\mathbf{v}}$ menjadi \mathbf{v} , dimana \mathbf{v} merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan sistem $\mathbf{x}(k+1) = A \otimes \mathbf{x}(k)$ digunakan transformasi $\mathbf{v} = P^\top \bar{\mathbf{v}}$.

Contoh 4.2.5. Perhatikan kembali matriks blok segitiga atas \bar{A} dan matriks permutasi P dalam Contoh 4.1.11. Matriks \bar{A} memiliki blok diagonal yaitu $A_{1,1} = \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}$, $A_{2,2} = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}$, $A_{3,3} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $A_{4,4} = \begin{bmatrix} \epsilon \end{bmatrix}$, $A_{5,5} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$. Berdasarkan Teorema 2.4.8 dan Teorema 2.4.10 maka dapat diperoleh $\lambda(A_{1,1}) = 9$, $\lambda(A_{2,2}) = 7$, $\lambda(A_{3,3}) = 6$, $\lambda(A_{4,4}) = \epsilon$, $\lambda(A_{5,5}) = 4$. Kemudian berdasarkan Algoritma 5 maka pada langkah pertama dapat diperoleh $\bar{\eta}_1 = 9$,

$\bar{\eta}_2 = 7, \bar{\eta}_3 = 6, \bar{\eta}_4 = \varepsilon, \bar{\eta}_5 = 4$. Selanjutnya untuk langkah 3-4 dilakukan secara iterasi sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \text{iterasi 1. } i = 1, j = 1 : A_{4,5} &\neq \varepsilon \text{ dan } \bar{\eta}_5 > \bar{\eta}_4 \Rightarrow \bar{\eta}_4 = \bar{\eta}_5 = 4 \\ j = 2 : A_{3,5} &\neq \varepsilon \text{ dan } \bar{\eta}_5 \not> \bar{\eta}_3 \Rightarrow \bar{\eta}_3 = 6 \\ j = 3 : A_{2,5} &\neq \varepsilon \text{ dan } \bar{\eta}_5 \not> \bar{\eta}_2 \Rightarrow \bar{\eta}_2 = 7 \\ j = 4 : A_{1,5} &= \varepsilon \text{ dan } \bar{\eta}_5 \not> \bar{\eta}_1 \Rightarrow \bar{\eta}_1 = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iterasi 2. } i = 2, j = 2 : A_{4,5} &\neq \varepsilon \text{ dan } \bar{\eta}_4 \not> \bar{\eta}_3 \Rightarrow \bar{\eta}_3 = 6 \\ j = 3 : A_{2,4} &= \varepsilon \text{ dan } \bar{\eta}_4 \not> \bar{\eta}_2 \Rightarrow \bar{\eta}_2 = 7 \\ j = 4 : A_{1,4} &= \varepsilon \text{ dan } \bar{\eta}_4 \not> \bar{\eta}_1 \Rightarrow \bar{\eta}_1 = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iterasi 3. } i = 3, j = 3 : A_{2,3} &= \varepsilon \text{ dan } \bar{\eta}_3 \not> \bar{\eta}_2 \Rightarrow \bar{\eta}_2 = 7 \\ j = 4 : A_{1,3} &= \varepsilon \text{ dan } \bar{\eta}_3 \not> \bar{\eta}_1 \Rightarrow \bar{\eta}_1 = 9 \end{aligned}$$

$$\text{iterasi 4. } i = 4, j = 4 : A_{1,2} \neq \varepsilon \text{ dan } \bar{\eta}_2 \not> \bar{\eta}_1 \Rightarrow \bar{\eta}_1 = 9$$

sehingga diperoleh $\bar{\eta}_1 = 9, \bar{\eta}_2 = 7, \bar{\eta}_3 = 6, \bar{\eta}_4 = 4$ atau dapat ditulis sebagai,

$$\bar{\eta} = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}^\top.$$

Dalam hal ini diperoleh calon-calon nilai eigen dari matriks \bar{A} yaitu $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 7, \lambda_3 = 6$ dan $\lambda_4 = 4$. Sehingga jika dilakukan pengecekan dalam penyelesaian $\bar{A} \otimes \lambda_i = \mathbf{v}_i \otimes \lambda_i, i = 1, 2, 3, 4$, maka diperoleh nilai eigen dari matriks \bar{A} yang memenuhi adalah $\lambda_1 = 9$ dengan vektor eigen $\bar{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}^\top$ dan $\lambda_3 = 6$ dengan vektor eigen $\bar{\mathbf{v}}_3 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 6 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}^\top$. Kemudian dengan menggunakan transformasi $\eta = P^\top \bar{\eta}$ maka diperoleh pasangan nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian dengan sistem $\mathbf{x}(k+1) = A \otimes \mathbf{x}(k)$ yaitu

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 9; \quad \mathbf{v}_1 &= P^\top \bar{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}^\top \\ \lambda_3 = 6; \quad \mathbf{v}_1 &= P^\top \bar{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 6 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}^\top \end{aligned}$$

4.3 Eigenmode pada Matriks Tereduksi atas Aljabar Max-Plus

Perhatikan kembali pengertian mengenai *eigenmode* dalam Bagian 2.4.3. Sebuah algoritma untuk menentukan *eigenmode* matriks persegi reguler tereduksi atas aljabar max-plus telah dibangun oleh (Königsberg, 2009) dan dikaji ulang oleh (Mursyidah dan Subiono, 2017). Berikut diberikan algoritma yang dimaksud.

Algoritma 6: (Königsberg, 2009) *Algoritma eigenmode matriks tereduksi reguler*

1. Ambil matriks tereduksi reguler $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$;
2. Tentukan bentuk matriks blok segitiga atas dari matriks A ;
3. Hitung nilai eigen dan vektor eigen dari blok matriks terakhir pada diagonal utama matriks blok segitiga atas dari matriks A . Misal $A_{b,b}$, maka hitung nilai eigen $\lambda_b = \lambda(A_{b,b})$ dan vektor eigen \mathbf{v}_b yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut. Selanjutnya, ambil $\xi_b = \lambda_b$ dan $i = b$;
4. Hitung nilai eigen λ_{i-1} dari matriks $A_{i-1,i-1}$;
5. Jika $\lambda_{i-1} > \xi_i$ lanjutkan ke langkah 6, jika tidak ke langkah 7.
6. Ambil $\xi_{i-1} = \lambda_{i-1}$ dan hitung vektor \mathbf{v}_{i-1} melalui persamaan berikut:

$$\xi_{i-1} \otimes \mathbf{v}_{i-1} = A_{i-1,i-1} \otimes \mathbf{v}_{i-1} \oplus \bigoplus_{j=1}^b A_{i-1,j} \otimes \mathbf{v}_j.$$

Kemudian, lanjutkan ke langkah 8;

7. Ambil $\xi_{i-1} = \lambda_i$ dan hitung vektor \mathbf{v}_{i-1} melalui persamaan berikut:

$$\lambda_i \otimes \mathbf{v}_{i-1} = A_{i-1,i-1} \otimes \mathbf{v}_{i-1} \oplus \bigoplus_{j=1}^b A_{i-1,j} \otimes \mathbf{v}_j.$$

Kemudian, lanjutkan ke langkah 8;

8. Jika $i - 1 \neq 1$ kembali ke langkah 4, jika tidak maka selesai.

Jadi didapatkan eigenmode tergeneralisasi dari matriks A adalah pasangan vektor (η, \mathbf{v}) , dengan $\eta = [\xi_1 \ \xi_2 \ \cdots \ \xi_b]^\top$ dan $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_b]^\top$.

Aplikasi dari dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi pada Algoritma 4 terletak pada langkah kedua, yaitu untuk menentukan bentuk matriks blok segitiga atas dari suatu matriks persegi reguler tereduksi. Untuk menjelaskan hal ini dapat diberikan langsung contoh sebagai berikut.

Contoh 4.3.1. Perhatikan kembali matriks persegi reguler tereduksi B dalam Contoh 4.1.11 dengan bentuk matriks blok segitiga atasnya yaitu \bar{B}

dapat diperoleh menggunakan dekomposisi Dulmage-mendelsohn termodifikasi sebagaimana dalam Contoh 4.1.11. Kemudian dengan menggunakan toolbox MAXPLUS di scilab dapat diperoleh eigenmode dari matriks blok segitiga atas \bar{B} yaitu

$$\eta = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \\ 6 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}^{\top} \quad \text{dan} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 26 \\ 30 \\ 28 \\ 14 \\ 14.5 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

dimana perhitungan tersebut diperoleh menggunakan Algoritma general power dalam (Fahim dkk, 2017).

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, maka dapat diperoleh kesimpulan yaitu

1. Metode dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi dapat digunakan untuk mendekomposisi sebarang matriks persegi A menjadi matriks blok segitiga atas $\bar{A} = P \otimes A \otimes Q$ dengan setiap blok diagonalnya merupakan matriks persegi. Kemudian matriks A dengan kardinalitas *matching* maksimumnya sama dengan banyak elemen diagonalnya yang tak nol memiliki bentuk matriks blok segitiga atas hasil dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi yaitu $\bar{A} = PAP^T$.
2. Analisis terkait keseluruhan nilai eigen dan vektor eigen yang mungkin dari matriks persegi reguler tereduksi atas aljabar max-plus dapat dilakukan pada bentuk matriks blok segitiga atas hasil dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi.
3. Metode dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi dapat digunakan pada Algoritma 6, yaitu untuk menentukan bentuk matriks blok segitiga atas dari matriks persegi reguler tereduksi atas aljabar max-plus.

5.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya, metode dekomposisi Dulmage-Mendelsohn termodifikasi dapat digunakan kedalam permasalahan sistem persamaan linier atas aljabar max-plus berbentuk $A \otimes b = c$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Alom, B. M. M., Das, S., and Islam, Md. S., “Finding the Maximum Matching in a Bipartite Graph”, DUET Journal, Vol. 1, Issue 1, June 2010.
- [2] Fahim K., Subiono., and van der Woude JW. “On a generalization of power algorithms over max-plus algebra”. Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications. ISSN 0924-6703. Volume 27. 27:181-203 (2017)
- [3] Heidergott, B., Olsder, G. J., and Woude, J. V. D., “Max Plus at Work Modelling and Analysis of Synchronized System: A Course on Max-Plus Algebra and Its Application”, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2006.
- [4] Brualdi, N. and Nikteghbali, A., “Combinatorial matrix classes”, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, volume=108, Cambridge University Press, 2006, 0-521-86565-4, 1106.05001
- [5] Königsberg, ZR., “A generalized eigenmode algorithm for reducible regular matrices over the max-plus algebra”, in Chinese Control and Decision Conference (Chinese, 2009), pp. 55985603.
- [6] Mursyidah, H., Subiono, “Eigenvalue, eigenvector, eigenmode of reducible matrix and its application”, AIP Conf. Proc. 1867, 020044-1020044-11, 2017.
- [7] Murota, K., “Matrices and Matroid for System Analysis”, vol 20, Department of Mathematical Informatics University of Tokyo, 2000.
- [8] Subiono., “Aljabar Min-Max Plus dan Terapannya, ver. 3.0.1”, Jurusan Matematika ITS, Surabaya, 22 Pebruari 2017.
- [9] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B. Orlin: Network Flows Theory, Algorithms and Applications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1993.

LAMPIRAN A

Implementasi Dekomposisi Dulmage-Mendelsohn Termodifikasi (Algoritma 3) Menggunakan Scilab

```
function [Abar, Mauxiliary, P, Q]=modifiedDM(A)
    [M,MKar]=maximummatching(A);
    [Mauxiliary]=auxiliary(A, M, MKar);
    [Abar, Mauxiliary, P, Q]=partialorder(Mauxiliary, A);
endfunction
```

```
//A=[-%inf -%inf -%inf 14 -%inf -%inf 17;
-%inf -%inf -%inf 24 -%inf 26 27;
-%inf -%inf -%inf -%inf -%inf 36 -%inf;
41 42 43 -%inf -%inf -%inf -%inf;
51 -%inf 53 -%inf 55 -%inf 57;
-%inf -%inf -%inf -%inf -%inf 66 -%inf;
-%inf -%inf -%inf -%inf 75 -%inf -%inf]
```

```
//B=[3 -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf 3;
4 -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf 0;
7 6 6 -%inf -%inf 3 -%inf;
-%inf -%inf -%inf 9 1 -%inf -%inf;
-%inf -%inf -%inf -%inf 7 -%inf 5;
-%inf -%inf 0 -%inf -%inf 5 -%inf;
5 -%inf -%inf -%inf -%inf -%inf 2]
```


LAMPIRAN B

Implementasi Teorema 4.1.10 dalam Matching Maksimum (Algoritma 4) Menggunakan Scilab

```
//Catatan : Dalam hasil program ini diperoleh matching M=(ci,ri)
function [M, MKar]=maximummatching(A)
    [n n]=size(A);
    //Mencari matching maksimum
    indeks=0;
    Abaru=A;
    while max(Abaru)~=-%inf
        B=zeros(n,n);
        for i=1:n
            for j=1:n
                if Abaru(i,j)~=-%inf then
                    B(i,:)=B(i,:)+1;
                    B(:,j)=B(:,j)+1;
                end
            end
        end
        for i=1:n
            for j=1:n
                if Abaru(i,j)~=-%inf then
                    B(i,j)=B(i,j)-1;
                else
                    B(i,j)=2*n;
                end
            end
        end
        [m,k]=min(B);
        Abaru(k(1),:)=-%inf;
        Abaru(:,k(2))=-%inf;
        indeks=indeks+1;
    end
end
```

```

        M(1, indeks)=k(2);
        M(2, indeks)=k(1);
    end
    // Mencari kardinalitas dari matching maksimum
    [l, MKar]=size(M);
    // Mencari kardinalitas p
    pKar=0;
    for i=1:n
        if A(i, i)~=-%inf then
            pKar=pKar+1;
        end
    end
    // Kondisi Mkar==pKar
    if MKar==pKar then
        indeks=0;
        for i=1:n
            if A(i, i)~=-%inf then
                indeks=indeks+1;
                M(1, indeks)=i;
                M(2, indeks)=i;
            end
        end
    end
end
endfunction

```

LAMPIRAN C
Implementasi Graf Bantu dalam Bentuk Matching M
Menggunakan Scilab

```
function [Mauxiliary]=auxiliary(A, M, MKar);
[n n]=size(A);
Mauxiliary=M;
if MKar~=n then
    for i=1:n
        cek1=0;tambah1=0;
        cek2=0;tambah2=0;
        for j=1:MKar
            if M(1,j)~=i then
                cek1=cek1+1;
            end
            if M(2,j)~=i then
                cek2=cek2+1;
            end
        end
        if cek1==MKar then
            tambah1=tambah1+1;
            Mauxiliary(1,MKar+tambah1)=i;
        end
        if cek2==MKar then
            tambah2=tambah2+1;
            Mauxiliary(2,MKar+tambah2)=i;
        end
    end
else
    Mauxiliary=M;
end
endfunction
```


LAMPIRAN D

Implementasi Urutan Parsial dalam Bentuk Matriks Menggunakan Scilab

```

function [Abar, Mauxiliary, P, Q]=partialorder(Mauxiliary, A);
[n n]=size(A);
P=rowpermutation(Mauxiliary(2,:));
Q=columnpermutation(Mauxiliary(1,:));
Abar=maxplusotimes(P,maxplusotimes(A,Q));
for i=1:n-1
    stop=0;
    for l=1:n-i
        for j=1:n-i
            if Abar(n+1-i,j)~=-%inf then
                Mbaru=Mauxiliary;
                for k=1:n
                    if k>=j & k<n+1-i then
                        Mauxiliary(2,k)=Mbaru(2,k+1);
                        Mauxiliary(1,k)=Mbaru(1,k+1);
                    else if k==n+1-i then
                        Mauxiliary(2,k)=Mbaru(2,j);
                        Mauxiliary(1,k)=Mbaru(1,j);
                    else
                        Mauxiliary(2,k)=Mbaru(2,k);
                        Mauxiliary(1,k)=Mbaru(1,k);
                    end
                end
            end
        end
    end
    P=rowpermutation(Mauxiliary(2,:));
    Q=columnpermutation(Mauxiliary(1,:));
    Abar=maxplusotimes(P,maxplusotimes(A,Q));
end
end

```

```
    end  
  end  
endfunction
```

LAMPIRAN E

Implementasi Matriks Permutasi Baris Menggunakan Scilab

```
function [P]=rowpermutation(p)
    [nx,ny]=size(p)
    P=zeros(ny,ny)-%inf;
    for i=1:ny
        P(i,p(1,i))=0;
    end
endfunction
```


LAMPIRAN F

Implementasi Matriks Permutasi Kolom Menggunakan Scilab

```
function [Q]=columnpermutation(q)
    [nx,ny]=size(q)
    Q=zeros(ny,ny)-%inf;
    for i=1:ny
        Q(q(1,i),i)=0;
    end
endfunction
```


LAMPIRAN G
Implementasi Operasi \otimes pada Matriks atas Aljabar
Max-Plus Menggunakan Scilab

```
function [AB]=maxplusotimes(A,B)
[m,p]=size(A);
[p,n]=size(B);
AB=zeros(m,n)-%inf;
for i=1:m
    for j=1:n
        for k=1:p
            AB(i,j)=max(AB(i,j),A(i,k)+B(k,j));
        end
    end
end
endfunction
```


BIOGRAFI PENULIS



Penulis bernama Muhamad Suef, lahir di Surabaya, 28 Agustus 1994, merupakan anak ketiga dari lima bersaudara. Penulis menempuh pendidikan formal di SD Taquma Surabaya tahun 2000-2002, MI Mufidah Sidoarjo tahun 2002-2003, MI Roudlotul Mustashlihin Sidoarjo tahun 2003-2006, SMP YPM Panjunan Sidoarjo tahun 2006-2009 dan SMA Khadijah Surabaya tahun 2009-2012 dengan jalur beasiswa SMA Khadijah. Setelah lulus dari SMA penulis melanjutkan studi S1 Jurusan Matematika di Institut Teknologi Sepuluh Nopember pada tahun 2012-2016 melalui jalur beasiswa BIDIKMISI, dengan Tugas Akhir bidang Aljabar yang berjudul "Kajian Ideal 2-Absorbing pada Semiring Komutatif". Penulis dapat dihibingi melalui alamat email berikut, muhamad.suef.94@gmail.com.